

Elméleti Fizika 1.

Török János, Orosz László, Unger Tamás

2026. február 12.

Tartalomjegyzék

I. Elméleti Mechanika	4
1. Matematikai bevezető	5
1.1. Jelölések	5
1.2. Vektor műveletek	5
1.3. Dirac-delta	7
1.4. Fourier-transzformáció	9
1.4.1. Periodikus függvények Fourier-analízise	9
1.4.2. Nem-periodikus függvények Fourier-analízise	11
1.5. Komplex Fourier-analízis	12
1.6. Fontos azonosságok Fourier-transzformációhoz	14
2. Egyetlen tömegpont kinematikája	16
2.1. Pálya	16
2.2. Általános mozgás	18
3. Egyetlen tömegpont általános dinamikája	21
3.1. Történeti bevezető	21
3.2. A tömegpont mozgásegyenlete	22
3.3. Munkatétel	23
3.4. Mechanikai energia megmaradás	24
3.5. Disszipatív erők. A munkatétel általánosítása	26
3.6. Egyetlen tömegpont perdülete	27
3.7. Megmaradási tételek egyetlen tömegpont mozgása során	28
3.8. Tömegpont speciális térbeli mozgása: a centrális erőter	29
4. Tömegpont-rendszerek	34
4.1. Tömegközéppont-tétel	36
4.2. Pontrendszer impulzustétele	36
4.3. Pontrendszer munkatétele	37
4.4. Pontrendszer perdülettétele	39

5. A mechanika elvei	41
5.1. Általános koordináták	41
5.2. A legkisebb hatás elve – Variációs számítás	42
5.3. Hamilton-formalizmus	45
6. Lineáris rendszerek analízise - lineáris mechanikai oszcillátor	47
6.1. Lineáris rendszer definíciója	47
6.2. Harmonikus oszcillátor	47
6.2.1. Túlszillapítás	49
6.2.2. Határcsillapítás	50
6.2.3. Alulszillapítás	50
6.2.4. Összefoglalás	52
6.2.5. Mechanikai energia	53
6.3. Gerjesztett csillapított oszcillátor	53
6.4. Green-függvény	54
6.4.1. Csillapított oszcillátor Green-függvénye	57
6.4.2. Fourier-transzformáció lineáris rendszerekre	58
7. Merev testek dinamikája	61
7.1. Merev test fogalma	61
7.2. Rögzített tengely körüli forgás	62
7.2.1. Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete	63
7.2.2. Rögzített tengely körül forgó merev test kinetikus energiája	65
7.2.3. Rögzített tengelyre ható erők	66
7.3. Szabad tengely körül forgó merev test	67
7.3.1. Főtengely rendszer	67
7.4. Rögzített pont körül forgó merev test dinamikája (a pörgettyű mozgás)	69
8. Deformálható testek mechanikája	74
8.1. Általános mérlegegyenletek	74
8.1.1. Konvektív, konduktív áram	77
8.2. Deformálható testek kinematikája	78
8.2.1. Elforgatás	80
8.2.2. Deformáció	81
8.2.3. Térfogatváltozás	82
8.3. Erőhatások deformálható testekben	83
8.4. Rugalmas közegek dinamikája	85
8.5. A kontinuummechanika mozgásegyenlete	87
8.5.1. Lagrange-féle mozgásegyenlet	88
8.5.2. Euler-féle mozgásegyenlet	90
8.6. Közegmozgás	91

8.6.1. Rugalmas közeg mozgása	92
8.6.2. Ideális folyadék áramlása	93
8.6.3. Newtoni-folyadék áramlása	94

I. rész
Elméleti Mechanika

1. fejezet

Matematikai bevezető

E fejezet célja, hogy összegyűjtse azokat a matematikai fogalmakat, amikre szükségünk lesz. Nem célunk bármiféle teljesség, bizonyítás pusztán egy segédlet, hogy általa elkerüljük a fizikai gondolatmenet megszakítását.

1.1. Jelölések

Objektum	jelölés	példák
skalár	dőlt betű	s, t
vektor	vastag betű	\mathbf{r}, \mathbf{F}
vektor komponens	dőlt betű, alsó index	v_i, F_i
4-es vektor	nagy betű	\mathbf{X}, \mathbf{P}
4-es vektor kontravariáns komponensek	dőlt betű, felső index	x^0, x^1
4-es vektor kovariáns komponensek	dőlt betű, alsó index	x_0, x_1
tenzor	vastag nagy-, görög betű	$\mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}$
tenzor komponens	dőlt nagy-, görög betű, alsó index	D_{ij}, σ_{ij}

1.2. Vektor műveletek

Legyenek adottak a következő mennyiségek:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{d} &= (d_1, d_2) \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Skalár szorzat, két vektorból egy skalárt kapunk:

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = \sum_i a_i b_i \quad (1.2)$$

Vektor szorzat, két hármas vektorból egy azokra merőleges hármas vektort kapunk:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$v_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad (1.3)$$

ahol ε_{ijk} a Levi-Civita-szimbólum :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ha } (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \\ -1 & \text{ha } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (1.4)$$

Itt megemlítjük a Kronecker-deltát is, amelynek definíciója:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (1.5)$$

Fontos azonosság a Levi-Civita-szimbólum és a Kronecker-delta között:

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (1.6)$$

A diadikus szorzat két vektorból csinál egy tenzort:

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \otimes \mathbf{a}$$

$$D_{ij} = d_i a_j \quad (1.7)$$

Tenzor szorzat, két tetszőleges vektor közötti lineáris kapcsolat:

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} \mathbf{a}$$

$$d_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} a_j \quad (1.8)$$

A deriválásból Descartes koordinátarendszerben is kialakítható egy hármas vektor, amely fontos szerepet játszik a fizikában. Ez a nabla szimbólum:

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \quad (1.9)$$

A nabla operátor mindig valamilyen helyfüggő mennyiségre hat. Először legyen ez a mennyiség skalár $V(\mathbf{r})$ ekkor egy vektort kapunk, amelynek i -edik komponense a következő:

$$(\nabla V)_i = (\text{grad}V)_i = \nabla_i V = \frac{\partial V}{\partial x_i} = \partial_i V \quad (1.10)$$

A fenti jelölés módok mind ekvivalensek és bármelyik előfordulhat a jegyzetben. A fenti mennyiség más néven egy skalármező gradiense, ami egy vektor, amely az adott pontban a legnagyobb meredekség irányába mutat és nagysága megegyezik a meredekséggel.

Ha a nabla operátor egy $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektormezőre hat akkor egy skalárt kapunk:

$$\nabla \mathbf{F} = \text{div} \mathbf{F} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \sum_i \partial_i F_i \quad (1.11)$$

A kapott művelet a divergencia, ami egy skalár és egy vektormező forráserősségét méri az adott pontban. Pozitív értékek forrást, negatív értékek nyelőt (semlyék) jelent.

A nabla keresztszorzata is értelmezhető. A kapott vektor i -edik komponensére a következő adódik:

$$(\nabla \times \mathbf{F})_i = (\text{rot} \mathbf{F})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \quad (1.12)$$

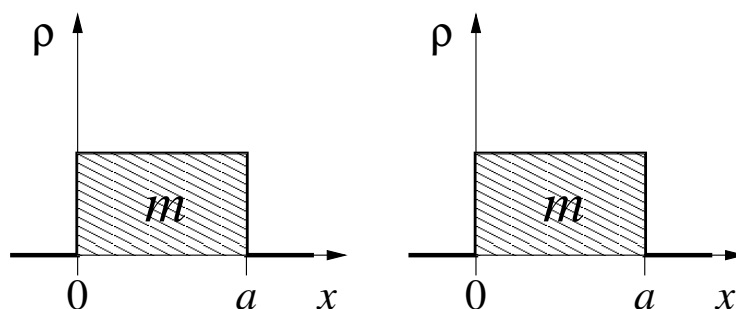
A fenti mennyiség a vektormező rotációját, azaz örvényerősségét méri. A pozitív irányt a jobbsodrás jelöli ki.

1.3. Dirac-delta

Az ideális határesetek, mint például tömegpont, tökéletesen merev testek pillanatszerű ütközése, nagyon fontos szerepet játszanak a fizikában. Közös jellemzőjük a fenti példának, hogy valamilyen jellemző térbeli, vagy időbeli kiterjedésétől eltekintünk. Igen jó okunk van erre, hiszen a tömegközépponti tétel 4.1 kimondja, hogy kiterjedt testek translációs mozgása olyan, mintha az össztömeg össze lenne sűrítve a tömegközéppontba és a külső erők erre hatnának. Tehát ha nem érdekel mindkét a test tömegközéppontjához viszonyított helyzete, a tömegponti leírás megfelelő. Ugyanígy az ütközések során minket legtöbbször csak a szóródás végeredménye érdekel, és a kölcsönhatás pontos módja lényegtelen.

Vizsgáljuk meg tehát először, hogy miképp lehet minél jobban közelíteni egy tömegpontot egy kiterjedt testtel! Dolgozzunk 1 dimenzióban és legyen a test homogén, kiterjedése $[0, a]$ (ld. 1.1 ábra). A test tömege a sűrűség integráljával számítható:

$$m = \int_0^a \rho(x) dx = a\rho \quad (1.13)$$



1.1. ábra. Tömegpont készítése: A test kiterjedése egyre csökken, a sűrűsége nő, miközben tömege állandó marad.

Ha tehát most a tömeget rögzítjük, miközben a test a kiterjedését csökkentjük, annak sűrűsége megnő: $\rho = m/a$. Jelöljük $D_a(x)$ -szel azt a függvényt, ami egy adott a -ra teljesíti, hogy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} D_a(x) dx \quad (1.14)$$

és emellett $D_a(x) = 0$, ha $x < 0$, illetve $x > a$. Minket a $a \rightarrow 0$ határeset érdekel, ilyen függvény azonban nincs, mivel egy pontban lenne véges a területe. Igazából a $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} D_a(x)$ „függvényből” minket csak a következő tulajdonság érdekel:

$$\int_x^y \delta(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha az } [x, y] \text{ tartományban nincs benn a } 0 \\ 1, & \text{ha } x < 0 < y \end{cases} \quad (1.15)$$

Ekkor az $m\delta(x)$ sűrűséget integrálva megkapnánk a tömeget.

Tehát, ha integrál jel mögött szerepel $\delta(x)$ akkor van értelme és akkor úgy lehet rá tekinteni, mint egy integrál-utasításra. Dimenziója:

$$[\delta(x)] = \frac{1}{m} \quad (1.16)$$

Vizsgáljuk meg most a másik említett problémát, a tökéletesen merev testek ütközését! Ütközzön egy dimenzióban tökéletesen rugalmasan két m tömegű test! Az 1-es test kezdeti sebessége v és az ütközés után 0-ra csökken. A 2-es testnél pont fordítva, 0-ról v -re nő a sebesség az ütközés során. Írjuk fel a 2-es test impulzus változását:

$$\Delta p = m\Delta v_2 = mv = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \quad (1.17)$$

Ahogy egyre keményebb anyagú testeket választunk úgy lesz a kölcsönhatás ideje egyre rövidebb, miközben az erőhatás egyre erősebb. A pillanatszerű ütközés határesetben a

tömegponthoz hasonlóan itt sem létezik erőfüggvény, de az előbbi integrál-utasításnak itt is van értelme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta p \delta(t) dt \quad (1.18)$$

Az itt definiált $\delta(t)$ dimenziója:

$$[\delta(t)] = \frac{1}{s} \quad (1.19)$$

Az előbbieken definiált $\delta(x)$ *disztribúciót* Dirac-deltának nevezzük.

Megjegyzés: A disztribúció-elmélet megalkotója L. Schwartz volt. Aki elolvastán P.A.M. Dirac *The Principles of Quantum Mechanics* (1930) könyvét elégedetlen volt annak matematikai korrektségével. Ebben a könyvben használta Dirac a fenti $\delta(t)$ függvényt először. Ezért ragadt rá a későbbiekben Dirac-delta név. Maga Dirac is óvatosan fogalmazott:

„Thus $\delta(x)$ is not a quantity which can be generally used in mathematical analysis like an ordinary function, but its use must be confined to certain simple types of expression for which it is obvious that no inconsistency can arise.”

Jóllehet a kvantummechanikai számításokban minden jól kijött, a függvényként való kezelése zavarta a matematikai képességeiről méltán híres Neumannt. Az ő ez irányú matematikai vizsgálódásai indították el a disztribúció elméletnek nevezett matematikai területet.

Foglaljuk össze a Dirac-delta tulajdonságait:

1. A Dirac-deltát tehát a következőképpen hat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\delta(t - t_0)dt = y(t_0) \quad (1.20)$$

2. A Dirac-deltát bármely véges tartójú függvényből elő lehet állítani határesetként, ha a tartót úgy nyomjuk 0 méretűvé, hogy közben az integrált 1-nek tartjuk.
3. Mértékegysége: $[\delta(t)] = 1/s$, illetve $[\delta(x)] = 1/m$
4. Szimmetrikus: $\delta(t) = \delta(-t)$
5. Átskálázás: $\delta(\lambda t) = \frac{1}{\lambda}\delta(t)$, ha $\lambda > 0$
6. A lépcsőfüggvény deriváltja: $\delta(t) = d\theta/dt$

1.4. Fourier-transzformáció

1.4.1. Periodikus függvények Fourier-analízise

Bevezetésül ismételjük át azt, amit az eddigi tanulmányaink során a rezgések spektrális felbontásáról hallottunk. A legismertebb gyakorlati példa erre a különböző hangszerek

által keltett hangok analízise. Azaz annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy mi a fizikai oka annak, hogy pl. ugyanaz a normál á hang minden hangszeren másképpen hallatszik, azaz különbséget tudunk tenni mondjuk a hegedű és az oboa hangja között.

Legyen $x(t)$ egy periodikus függvény T periódusidővel ($x(t + kT) = x(t)$, minden $k \in \mathbb{Z}$ -re), amely abszolút integrálható, azaz

$$\int_0^T |x(t)| dt < \infty. \quad (1.21)$$

Ekkor mivel a szinusz és koszinusz függvények ortogonális bázist alkotnak L_2 felett, felírható x Fourier-sora:

$$x(t, T) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)] + \frac{b_0}{2}, \quad (1.22)$$

ahol $\omega = 2\pi/T$. Az a_k, b_k Fourier-együtthatók meghatározzák $x(t)$ -t. Visszafelé a szinusz és koszinusz függvények ortogonáltságát kihasználva tudjuk meghatározni a Fourier-együtthatókat az $x(t)$ függvényből. Emlékeztetőül az ortogonáltság következménye:

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \sin(n\omega t) dt = \frac{T}{2} \delta_{kn} \quad (1.23)$$

$$\int_0^T \cos(k\omega t) \cos(n\omega t) dt = \frac{T}{2} \delta_{kn} \quad (1.24)$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t) \cos(n\omega t) dt = 0, \quad (1.25)$$

ahol δ_{kn} a (1.5)-ben definiált Kronecker-delta. Mindezek felhasználásával a Fourier-együtthatók a következőképpen számolhatók ki:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt, \end{aligned} \quad (1.26)$$

ahol $k \in \mathbb{N}$. Láthatóan $a_0 = 0$, illetve

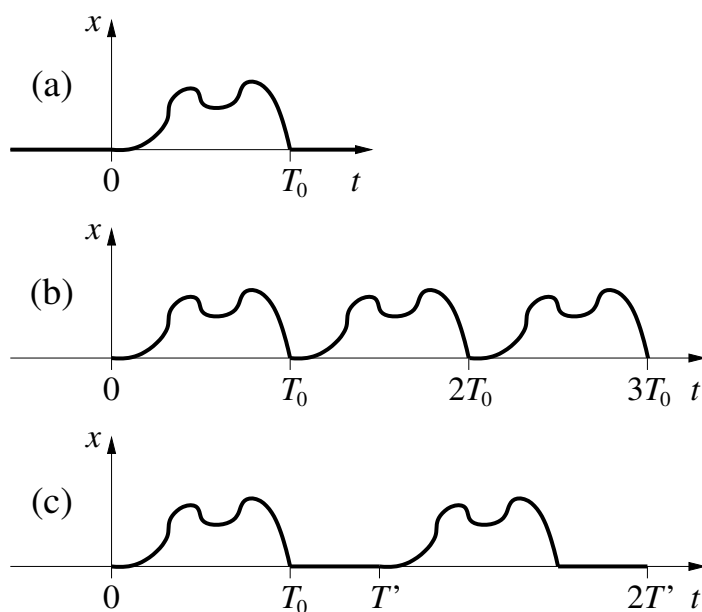
$$b_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.27)$$

Ezért, ahogy már láttuk:

$$x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)] \quad (1.28)$$

1.4.2. Nem-periodikus függvények Fourier-analízise

Természetes módon felmerül a kérdés, hogy vajon egy nem periodikus $x(t)$ függvény szintén felbontható-e valamiféle összetevőkre. Azaz létezik-e nem periodikus függvények spektrális felbontása. A válasz igen!



1.2. ábra. (a) Véges tartójú $x(t)$ függvény. (b) T_0 periódusú periodikus függvény $x(t)$ -ből. (c) T' periódusú periodikus függvény $x(t)$ -ből.

Legyen $x(t)$ egy véges tartójú ($t \in [0, T_0]$) függvény (1.2 (a) ábra). Ha a függvény tartóját megismételjük egymás mellett (1.2 (b) ábra), akkor T_0 periódus idejű periodikus függvényt kapunk. Ennek Fourier-sora:

$$x(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)], \quad (1.29)$$

ahol $\omega = 2\pi/T_0$.

Megtehetjük, hogy a véges tartókat nem pontosan egymás mellé illesztjük, mint a 1.2 (c) ábrán, ekkor az $x_{T'}(t)$ periodikus függvényt kapjuk T' periódusidővel. Minél nagyobbra választjuk T' -t, annál inkább hasonlít a periodikus függvényünk az eredetire. Természetesen $x_{T'}(t)$ Fourier-sora is felírható, de most az alapharmonikus $\omega' = 2\pi/T'$:

$$x_{T'}(t) = \frac{b_{0,T'}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_{k,T'} \sin(k\omega' t) + b_{k,T'} \cos(k\omega' t)]. \quad (1.30)$$

Az eredeti $x(t)$ függvény az alábbi határátmenettel áll elő:

$$x(t) = \lim_{T' \rightarrow \infty} x_{T'}(t) \quad (1.31)$$

Ennek két következménye lesz: Egyrészt folytonos lesz a spektrum, hiszen az alapharmónikus $\Delta\omega' = \omega' = 2\pi/T' \rightarrow 0$, másrészt az $a_{k,T'}, b_{k,T'}$ együtthatók is tartanak nullához:

$$x(t) = \lim_{T' \rightarrow \infty} x_{T'}(t) = \lim_{T' \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k,T'} \sin(k\omega't) + B_{k,T'} \cos(k\omega't)] \Delta\omega'. \quad (1.32)$$

Itt elhagytuk a nullához tartó konstans $b_{0,T'}$ tagot. Ez lényegében az integrál diszkrét definíciója, azaz:

$$x(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \sin(\omega t) + B(\omega) \cos(\omega t)] d\omega \quad (1.33)$$

Ezt nevezzük Fourier-integrálnak. Az együtthatók meghatározása:

$$A(\omega) = \frac{T'}{2\pi} a_{k,T'} = \frac{T'}{2\pi} \frac{2}{T'} \int_0^{T'} x_{T'}(t) \sin(k\omega't) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{T_0} x(t) \sin(\omega t) dt, \quad (1.34)$$

ahol $\omega = k\omega'$. Összegezve:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \quad (1.35)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt \quad (1.36)$$

Az integrálási tartomány kiterjesztésénél kihasználtuk $x(t)$ véges tartósságát.

1.5. Komplex Fourier-analízis

A folytonos Fourier-analízist érdemes továbbvinni komplex számok esetére is. Ismert, hogy

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad \text{és} \quad \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}. \quad (1.37)$$

Ekkor az $x(t)$ Fourier-transzformáltja a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{A(\omega)}{2i} + \frac{B(\omega)}{2} \right] + e^{-i\omega t} \left[-\frac{A(\omega)}{2i} + \frac{B(\omega)}{2} \right] d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \underbrace{\frac{1}{2} [B(\omega) - iA(\omega)]}_{\tilde{X}(\omega)} + e^{-i\omega t} \underbrace{\frac{1}{2} [B(\omega) + iA(\omega)]}_{\tilde{X}^*(\omega)} d\omega \end{aligned} \quad (1.38)$$

Bevezettük a $\tilde{X}(\omega) = [B(\omega) - iA(\omega)]/2$ komplex együtthatót. A $\tilde{X}^*(\omega)$ ennek komplex konjugáltja. $x(t)$ Fourier-transzformáltja most így néz ki:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^\infty [\tilde{X}(\omega)e^{i\omega t}] d\omega + \int_0^\infty [\tilde{X}^*(\omega)e^{-i\omega t}] d\omega = \\ &= \int_0^\infty [\tilde{X}(\omega)e^{i\omega t}] d\omega + \int_{-\infty}^0 [\tilde{X}^*(-\omega')e^{+i\omega't}] d\omega' \end{aligned} \quad (1.39)$$

A második lépésben végrehajtottunk egy változó cserét. A szinusz és koszinusz függvények páratlan illetve párossága miatt igazak a következő összefüggések:

$$A(-\omega) = -A(\omega), \quad \text{és} \quad B(-\omega) = +B(\omega) \quad (1.40)$$

Ebből következik hogy

$$\tilde{X}^*(-\omega) = \frac{B(-\omega) + iA(-\omega)}{2} = \frac{B(\omega) - iA(\omega)}{2} = \tilde{X}(\omega) \quad (1.41)$$

Azaz a komplex Fourier-transzformáció az alábbi egyszerű alakot veszi fel:

$$x(t) = \int_{-\infty}^\infty \tilde{X}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1.42)$$

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.43)$$

Az $x(t)$ valós időfüggvény Fourier-transzformáltja a $\tilde{X}(\omega)$ komplex frekvenciafüggvény. Gyakran mondjuk azt is, hogy: Az $x(t)$ függvény Fourier spektruma az $\tilde{X}(\omega)$. A Fourier-transzformációra a következői szimbólumot használjuk:

$$\mathcal{F}[x(t)] = \tilde{X}(\omega) \quad (1.44)$$

Amint már régebben utaltunk rá, a Fourier-transzformáció mindig létezik, ha a transzformálandó függvény abszolút, vagy négyzetesen integrálható:

$$\int_{-\infty}^\infty |x(t)| dt < \infty, \quad \text{vagy} \quad \int_{-\infty}^\infty x(t)^2 dt < \infty \quad (1.45)$$

1.6. Fontos azonosságok Fourier-transzformációhoz

Írjuk fel egy függvény Fourier-transzformáltjának inverz Fourier-transzformáltját:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{i\omega t} d\omega = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} x(t') e^{i\omega(t-t')} dt' d\omega = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \right) dt' = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t-t') dt'
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

A fenti azonosság alapján felírható a Dirac-delta egy kicsit szokatlan előállítása:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\mathcal{F}[\delta(t)]} e^{i\omega t} d\omega, \tag{1.47}$$

ahonnan leolvasható a Dirac-delta Fourier-transzformáltja:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{2\pi} \tag{1.48}$$

Hajtsuk végre a $t \rightarrow -\omega$ és $\omega \rightarrow t$ változó cseréket az (1.47) egyenletben! Ekkor a konstans Fourier-transzformáltját kapjuk:

$$\begin{aligned}
 \delta(\omega) &= \delta(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} dt \\
 \mathcal{F}[1] &= \delta(\omega)
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

További néhány fontos tételt is felírhatunk, amelyekben bonyolult műveletek egyszerű szorzássá válnak Fourier térben.

$$\mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = i\omega \mathcal{F}[f(t)] \tag{1.50}$$

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)] \tag{1.51}$$

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') dt' \right] = 2\pi \mathcal{F}[f(t)] \mathcal{F}[g(t)] \tag{1.52}$$

Az első kettő állítás triviálisan bizonyítható a definícióból, az utolsó a *konvolúció* Fourier-transzformáltja a lineáris rendszerek analízisének (6.4.2 fejezet) kap fontos szerepet. Bi-

zonyításához induljunk ki az $f(t')$ és a $g(t - t')$ Fourier-transzformáltjából:

$$f(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t'} d\omega \quad (1.53)$$

$$g(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega') e^{i\omega'(t-t')} d\omega' \quad (1.54)$$

Most írjuk fel a konvolúciót:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t - t')dt' &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t'} d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega') e^{i\omega'(t-t')} d\omega' \right) dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \tilde{G}(\omega') e^{i\omega t} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t'} dt' \right)}_{2\pi\delta(\omega - \omega')} d\omega d\omega' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \tilde{F}(\omega) \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (1.55)$$

A fenti kifejezésből leolvasható, hogy a konvolúció Fourier-transzformáltja valóban az (1.52) egyenletnek megfelelő.

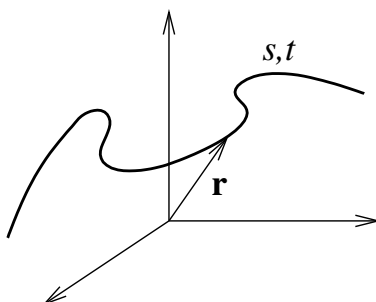
2. fejezet

Egyetlen tömegpont kinematikája

2.1. Pálya

A kinematika mechanikai rendszerek mozgásának leírásával foglalkozik. Kizárólag a *hogyan* kérdésre keresi a választ a *miért*ek megválaszolása a dinamika feladata. Első lépésként ebben a fejezetben egyetlen tömegpont mozgását vizsgáljuk.

Egy tömegpont helyét egy adott pillanatban egy vonatkoztatási rendszerben a helyvektor \mathbf{r} adja meg. A tömegpont mozgása során egy térgörbét követ, melyet az $\mathbf{r}(\lambda)$ függvénnyel írjuk le. Matematikailag igen sokféle módon lehet a λ paramétert definiálni, a fizikai szemléletessége miatt a kinematikában mi kétféle paraméterezést használunk: az eltelt időt $\lambda \equiv t$, illetve a megtett utat $\lambda \equiv s$. Természetesen a pálya mentén befutott távolság és a idő egymással szoros kapcsolatban van. Az $s(t)$ függvény a pont mozgásának egyik fontos kinematikai jellemzője.



2.1. ábra. Egy tömegpont pályája.

Időn itt azt a mennyiséget kell érteni, amelyet az inerciarendszerben elhelyezett stopperóra mér. Ez a praktikus definíció (*az idő az, amit az óra mér*) most számunkra egy jó darabig elegendő lesz. Az idő fogalmának precíz kifejtésére csak a speciális relativitás-

elmélet és a kvantummechanika során kerülhet sor. Filozófiai kérdésekkel ezen tantárgyon belül a szükségesnél többet nem foglalkozunk. A kinematika feladata, hogy meghatározzuk a helyvektor idő szerinti deriváltjainak értékét, mivel ezekre van szükségünk a dinamikához. A Newton -féle mozgástörvény (Newton II) miatt azonban tudjuk, hogy csak az első és második deriváltra van szükségünk. Az idő szerinti deriváltat ponttal jelöljük:

$$\mathbf{r}(t) \leftrightarrow \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}(t) \leftrightarrow \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad (2.1)$$

A magasabb rendű deriváltakra csak speciális esetekben lehet szükség.

A legegyszerűbb módszer az, ha felvesszünk egy koordináta-rendszert és abban megadjuk az $\mathbf{r}(t)$ függvény skalár komponenseit, majd meghatározzuk az idő szerinti deriváltakat. Descartes koordináta-rendszer esetén ez csak az x, y, z skalár komponensek időderiváltjait jelenti. Görbevonaltú koordináták esetén a helyzet bonyolultabb. Itt ugyanis az egységvektorok iránya függhet attól, hogy a tér melyik pontjában vagyunk. Ezért aztán a tömegpont mozgása során az egységvektorok idő szerinti deriváltja már nem lesz zérus, így a formulák bonyolultabb alakot öltenek. Az 2.1 táblázatban összefoglaljuk ezeket.

Koordináta-rendszer	Descartes	Henger
Descartes-koordináták	$x = x$ $y = y$ $z = z$	$x = R \cos \phi$ $y = R \sin \phi$ $z = z$
Egységvektorok	$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$	$(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$
Helyvektor $\mathbf{r} =$	$x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$	$R\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_z$
Első derivált $\dot{\mathbf{r}} =$	$\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z$	$\dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z$
Második derivált $\ddot{\mathbf{r}} =$	$\ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z$	$(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_R +$ $(R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z$
Koordináta-rendszer	Gömbi	
Descartes-koordináták	$x = r \sin \vartheta \cos \phi$ $y = r \sin \vartheta \sin \phi$ $z = r \cos \vartheta$	
Egységvektorok	$(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\phi)$	
Helyvektor $\mathbf{r} =$	$r\mathbf{e}_r$	
Első derivált $\dot{\mathbf{r}} =$	$\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + r\dot{\phi}\sin\vartheta\mathbf{e}_\phi$	
Második derivált $\ddot{\mathbf{r}} =$	$(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta)\mathbf{e}_r +$ $(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r\dot{\phi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta)\mathbf{e}_\vartheta +$ $r\ddot{\phi} \sin \vartheta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\phi} \cos \vartheta)\mathbf{e}_\phi$	

2.1. táblázat. A helyvektor időderiváltjai Descartes, henger és gömbi koordináta-rendszerben.

Az 2.1 táblázatból kiolvashatók pl. a körmozgás kinematikai adatai. Célszerű henger koordináta-rendszert használni. Törtéjék a mozgás az xy -síkból lévő O origó centrumú R_0 sugarú körpályán. Azaz most $z \equiv 0$ és $R = R_0$ állandó. Ezért azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r} = R_0 \mathbf{e}_R \quad (2.2)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = R_0 \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi = R_0 \omega \mathbf{e}_\phi = v \mathbf{e}_\phi \quad (2.3)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -R_0 \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_R + R_0 \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi = -R_0 \omega^2 \mathbf{e}_R + R_0 \dot{\omega} \mathbf{e}_\phi, \quad (2.4)$$

ahol bevezettük az $\omega = \dot{\phi}$ szögsebesség fogalmát és a pont $v = R_0 \omega$ (pályamenti) sebességét. A formulánkban automatikusan megjelent a centripetális gyorsulás is:

$$a_{\text{cp}} = -R_0 \omega^2 = \frac{-v^2}{R_0}, \quad (2.5)$$

amely természetesen $-\mathbf{e}_R$ irányú, azaz mindig a kör középpontja felé mutat.

A későbbiek során (főleg a kiterjedt testek forgó mozgásának a tanulmányozásakor) igen hasznos lesz egy új fogalomnak, az *szögsebesség-vektornak* a bevezetése. Ez az imént használt ω szögsebesség fogalmának az általánosítása, amely során a körmozgást jellemző két fontos információt, nevezetesen a szögsebességet és a mozgás síkjának a térbeli helyzetét egyetlen fogalomban egyesítjük. Egy sík térbeli orientációját az \mathbf{e}_n normálvektorral határozzuk meg. Ha az \mathbf{e}_n vektor a körmozgás síkját jelöli, akkor a szögsebesség-vektort az $\boldsymbol{\omega} \equiv \omega \mathbf{e}_n$ kifejezés definiálja.

A szögsebesség-vektor igen hasznos fogalom a sebesség meghatározására. Könnyen belátható, hogy az

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.6)$$

kifejezés meghatározza a körmozgást végző tömegpont sebességét.

2.2. Általános mozgás

Egy adott koordináta-rendszerben, az $\mathbf{r}(t)$ általános térbeli mozgás ismeretében, a sebességvektor és a gyorsulásvektor formálisan kiszámítható. Az eredmény legtöbbször egyáltalán nem szemléletes, mert a három vektor egymáshoz való (geometriai) viszonya a kapott formákból nehezen olvasható ki. Ezért a kinematikában azt a megoldást választjuk, hogy a sebesség- és a gyorsulásvektorokat a tömegpont pályájához viszonyítva határozzuk meg.

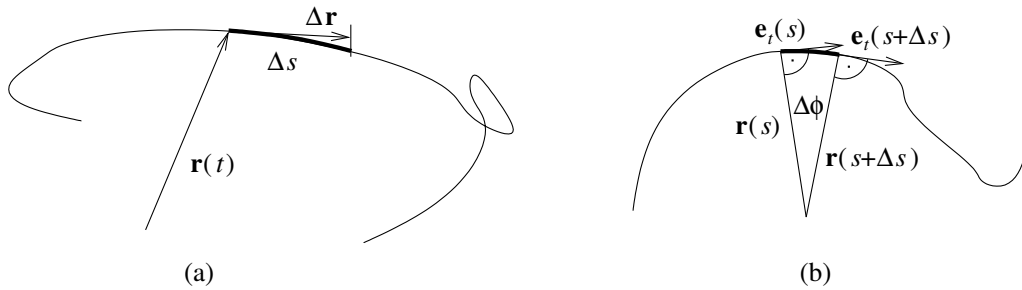
Mivel a pályát magát az $\mathbf{r}(s)$ függvény adja meg, ezért célszerű lesz, ha az időderiváltakat az $\mathbf{r}(s(t))$ összetett függvényből számítjuk ki. A közvetett deriválás művelete segítségével, a sebességvektor a következő módon írható fel:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}(s(t))] = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{r}' \dot{s}, \quad (2.7)$$

ahol vesszővel az út szerinti deriválást jelöltük. Az út idő szerinti deriváltja a sebesség ($\dot{s} = v$), A helyvektor út szerinti deriváltjának, \mathbf{r}' -nek igen szemléletes geometriai jelentése van. Ugyanis:

$$\mathbf{r}' = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{e}_t \quad (2.8)$$

Hiszen amint a 2.2 (a) ábrából kitűnik Δr határértékben a pálya érintőjébe megy át. Az érintő irányú egységvektort, tangenciális egységvektornak nevezzük és \mathbf{e}_t -vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{r}(s)$ térgörbe (a pont pályája) s szerinti deriválása magáról a pálya geometriájáról szolgáltat adatokat, hiszen közvetlenül az időparamétert nem tartalmazza.



2.2. ábra. Egy tömegpont pályája. A pályaérintő.

Számoljuk ki a gyorsulást:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{v}\mathbf{e}_t + v\mathbf{e}'_t \frac{ds}{dt} = \dot{v}\mathbf{e}_t + v^2\mathbf{e}'_t \quad (2.9)$$

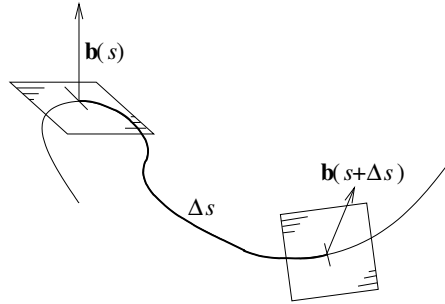
Határozzuk meg a tangenciális egységvektor úthossz szerinti deriváltját. A 2.2 (b) ábra alapján:

$$\mathbf{e}'_t = \mathbf{e}_n \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{\mathbf{e}_n}{R_g}, \quad (2.10)$$

ahol R_g a pálya görbületi sugara, a reciprokát pedig görbületnek nevezzük. Tehát a gyorsulás

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{R_g}\mathbf{e}_n \quad (2.11)$$

Ebből leolvasható, hogy a gyorsulásvektornak van egy sebességgel párhuzamos és egy arra merőleges komponense. Az előbbi a sebesség nagyságának, a másik a sebesség irányának a megváltozását jellemzi, ez utóbbi a jól ismert centripetális gyorsulás. Látható, hogy állandó görbületi sugár esetén az általános körmozgás (2.4) kinematikai egyenleteihez jutottunk.



2.3. ábra. Binormális egységvektor egy térbeli pályán

Általános térbeli mozgásnál a tangenciális és a normális egységvektorok a pillanatnyi körmozgás síkját adják meg (ld. 2.3 ábra). Ennek a síknak a térbeli helyzetét a binormális egységvektorral jellemezhetjük:

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n \quad (2.12)$$

Síkmozgás esetén \mathbf{b} állandó, térbeli pálya esetén \mathbf{b} változtathatja az irányát. Ezen irányváltozás nagyságát fejezi ki a torzió, amelynek definíciója a következő:

$$T = \frac{d\beta}{ds}, \quad (2.13)$$

ahol β jelöli a binormális egységvektor elfordulási szögét. Azaz a torzió a binormális vektor szögsebessége.

Igazak a következő (egyáltalán nem nyilvánvaló) összefüggések (a bizonyítást az Olvasóra bízunk):

$$\frac{1}{R_g} = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} \quad (2.14)$$

$$T = \frac{|(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')\mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2} = \frac{|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} \quad (2.15)$$

Látható tehát, hogy két fontos geometriai adat (a pálya R_g görbületi sugara és T torziója) egyaránt kiszámítható a pálya helyvektorának út, vagy idő szerinti deriváltjaiból.

3. fejezet

Egyetlen tömegpont általános dinamikája

3.1. Történeti bevezető

A dinamika a mechanikának az a része, amelyik a mozgás okaival foglalkozik. A „miért”-re ad választ, ellentétben a kinematikával, amelyik csak a „hogyan”-nal foglalkozik. Isaac Newton (1643-1727) fogalmazta meg először azokat az alaptörvényeket, amelyek segítségével meg tudjuk magyarázni, hogy a testek miért éppen úgy mozognak, ahogyan azt egy adott esetben teszik.

„Égi” és „földi” megfigyelések és a megfigyelt mechanikai mozgások számszerű leírásának sokasága jelentette az utat a newtoni törvények felismeréséhez.

Newton maga mondta:

„Ha távolabbra láttam másoknál, azt azért tehettem, mert óriások vállán álltam.”

Tycho Brahe, Galileo Galilei, Johannes Kepler, René Descartes, Christiaan Huygens voltak ezek az „óriások”. Ezen megismerési út végét Newton műve, a *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* jelentette (1687).

Megszületett a mai értelemben vett fizika tudománya. Már a mű címe is lényeges, hiszen a természetfilozófia matematikai elveiről beszél. Ez mintegy válasz Galilei alapvető felismerésére, amely a mai modern természettudomány (és az ezen alapuló technikai civilizációnk) egyik alapköve. Eszerint ugyanis: *„A természet nagy könyvében csak az tud olvasni, aki ismeri azt a nyelvet, amelyen e könyv írva van, és az a nyelv: a matematika.”* Ez a fontos tény Newton munkásságában konkrét alakot öltött, hiszen Newton felismerte azt a matematikai nyelvet is (ez a differenciál- és az integrál-számítás), amellyel a Természet (a mechanikai jelenségeknél) szól hozzánk. Természetesen az azóta eltelt több mint 300 év alatt sokan és sokat foglalkoztak mechanikával. A Newton által megfogalmazott törvények (a lényegük megtartása mellett) letisztultak és absztrakt matematikai modellé fejlődtek. Ma már ebben a formában fogalmazzuk meg őket.

Newton törvényeit (axiómáit) tömegpontokra mondjuk ki. Ez az a modell, amelyen a matematikai számítások egyértelműen elvégezhetők. A valódi, kiterjedt testeket tö-

megpontok sokaságaként modellezzük majd. Az itt felismert törvények már precízen alkalmazhatóak a minket körülvevő véges méretű (tetszőleges halmazállapotú) tárgyak mechanikai viselkedésének a tanulmányozására. A következőkben ezt az utat követjük.

Az általunk felismert természettörvények ún. kerettörvények, azaz pontosan meg tudjuk (meg kell tudnunk) mondani azon jelenségeknek a körét, amelyeknek a megmagyarázására szolgálnak. Ilyen a newtoni mechanika is. A Newton törvények fénysebességnél sokkal kisebb sebességgel mozgó, makroszkopikus méretű testek mechanikai viselkedését modellezzik. Ezt nevezzük klasszikus mechanikának.

A klasszikus mechanika általánosítása nagy sebességek esetén a speciális relativitáselmélethez, mikroszkopikus (atomi méretek) tartományában pedig a kvantummechanikához vezet. A modern fizikának ezek a fejezetei természetesen nem hatálytalanítják a Newton törvényeket. A newtoni modell (éppen azért, mert „csak” modell) továbbra is igen pontosan megadja a klasszikus testek mindennapi dinamikáját. Sőt, mind a speciális relativitáselmélet, mind pedig a kvantummechanika határesetben vissza kell, hogy adjon a newtoni mozgástörvényt. Ezt nevezzük korrespondencia-elvnek. Az elméleti fizika egyik igen fontos feladata ezen modellek közötti viszonyrendszer bemutatása.

3.2. A tömegpont mozgásegyenlete

Tekintsünk egy m tömegű pontszerű testet. Ez a tömegpont a rá ható erők hatására valamilyen $\mathbf{r}(t)$ függvény szerint mozog. Az $\mathbf{r}(t)$ függvényt egy olyan vonatkoztatási rendszerben adjuk meg, amelyben a Newton törvények igazak, azaz ha a testre nem hat erő, egyenesvonalú egyenletes mozgást végez (Newton 1. törvénye). Ennek a vonatkoztatási rendszernek a matematikai modellje egy koordináta-rendszer. Az erők matematikai modellje az erővektor. A tömegpont mozgásegyenlete Newton 2. törvénye alapján:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

ahol az impulzus $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Newton 3. törvénye az erő-ellenerő kapcsolatot mondja ki, mely szerint két test kölcsönhatása során mindkét testre azonos nagyságú, egymással ellentétes irányú erő hat. Ha a tömegpontra N darab erő hat, akkor a rá ható eredő erő Newton 4. törvénye alapján:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad (3.2)$$

Az erők forrása a tömegpont és a testek közötti kölcsönhatás. A hétköznapi életben a minket körülvevő makroszkopikus testek között csak akkor lép fel erőhatás, ha azok közvetlenül érintkeznek egymással. Ezért a tömegpontnak is érintkeznie kell a reá ható testekkel. Ugyanakkor érezhetően jelen van a hétköznapijainkban egy olyan erőhatás is, ahol nem kell, hogy a tömegpont közvetlenül érintkezzen a testtel. Ez a gravitáció. Nem véletlen, hogy a Principiában Newton kidolgozta a Newton-féle gravitáció elméletét

is. Newton természetesen még nem ismerhette az elektrodinamikát. Nem tudott az elektromos töltéssel bíró részecskék és az elektromágneses tér kölcsönhatásairól. Nem volna szükségszerű, de tapasztalati tény, hogy a Newton törvények az elektromágneses mezőben mozgó tömegpontra is érvényesek.

Mindenfajta erő ún. lokális erő. Ez azt jelenti, hogy az erőhatás csak a tömegpont \mathbf{r} helyén lévő fizikai viszonyoktól függ (bármit is értsünk most „fizikai viszonyokon”). Ennek a lokalitásnak a következtében az helyen lévő tömegpontra ható eredő erő matematikai alakja (elvileg) a következő lehet:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots, t) \quad (3.3)$$

A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy az első deriválnál magasabb rendű tagok nem jelennek meg az erőtvényekben, azaz elég az alábbi függvényt vizsgálni:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (3.4)$$

Az $\dot{\mathbf{r}}$ függés leginkább a súrlódásból és a közegellenállásból származó erők esetén fordul elő, illetve az elektromágneses mezőben mozgó töltéssel rendelkező tömegpontra ható Lorentz-erő tartalmaz sebesség függést. Fontos osztály tehát, amikor a sebességfüggés nem jelenik meg, ekkor az erő

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad (3.5)$$

olyan mintha a tér tulajdonsága lenne, ami függ a tömegpont mozgásállapotától. A fenti függvény neve erőter, hiszen a tér minden egyes pontjában a tömegpontra egy jól definiált erő hat.

3.3. Munkatétel

A mozgásegyenletből fontos törvények vezethetők le. A továbbiakban, hacsak azt külön nem említjük, a tömegpont tömege mindig állandó lesz: $\dot{m}=0$.

Induljunk ki a mozgásegyenletből:

$$\dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (3.6)$$

Sorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát skalárisan az $\dot{\mathbf{r}}$ sebességvektorral, ami után az egyenlet bal oldala teljes derivált alakban írható:

$$m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} \quad (3.8)$$

Integráljuk mind a két oldalt a $[t_1, t_2]$ időtartományra. Ekkor kapjuk, hogy:

$$\left[\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} dt \quad (3.9)$$

A (3.9) egyenlet jobb oldalán lévő integrál neve az \mathbf{F} erő által végzett *munka*:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} dt = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} \equiv W_{12} \quad (3.10)$$

A (3.9) egyenlet bal oldalán álló kifejezést kinetikus energiának nevezzük.

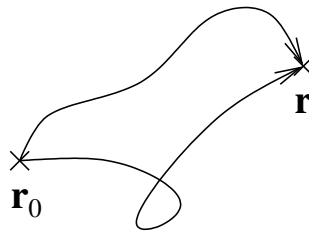
$$E_{\text{kin}} \equiv \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (3.11)$$

A kapott egyenlőség a *munkatétel*:

$$E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} = W_{12} \quad (3.12)$$

Szavakban: *egy tömegpont kinetikus energiájának a megváltozása egyenlő a rá ható erők munkájával.*

3.4. Mechanikai energia megmaradás



3.1. ábra. A két pályán az erőter munkája megegyezik, ha a körintegrál zérus.

Tegyük fel, hogy a tömegpontra ható erő olyan, hogy közvetlenül nem függ sem az időtől sem pedig a pont mozgásállapotától, azaz $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektortérrel modellezhető. Továbbá speciálisan olyan, hogy egy zárt görbére vett integrálja zérus, azaz:

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0. \quad (3.13)$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy ennek az erőnek a tér két tetszőleges pontja között végzett munkája nem függ magától a pálya alakjától, csakis a két végpont helyzetétől (Lásd 3.1 ábra), azaz

$$W_{\mathbf{r}_0 \mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (3.14)$$

független az úttól. Ekkor egy tetszőleges (önkényes) $V(\mathbf{r}_0)$ referencia értékhez képest, definiálható a potenciális energia:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (3.15)$$

A $V(\mathbf{r})$ potenciális energia a tér minden pontjában kiszámítható. Természetesen megadható az inverz kapcsolat is $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ és $V(\mathbf{r})$ között. Vizsgáljuk meg a potenciális energia megváltozását egy kis, infinitezimális Δx elmozdulásra. Ekkor (3.15) egyenlet a következő alakot veszi fel:

$$\Delta V \simeq -F_x \Delta x, \quad (3.16)$$

ahonnan

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = F_x \quad (3.17)$$

Ugyanígy $\partial V / \partial x_i = -F_i$, azaz

$$\mathbf{F} = -\text{grad}V = -\nabla V. \quad (3.18)$$

A jobb oldalon álló matematikai művelet neve gradiens, amely egy skalármező meredekség vektorát határozza meg:

$$\text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (3.19)$$

Ebben az esetben a munkatétel így írható:

$$\left. \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right|_{\mathbf{r}_2} - \left. \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right|_{\mathbf{r}_1} = W_{12} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \quad (3.20)$$

Átrendezve:

$$\left. \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right|_{\mathbf{r}_1} + V(\mathbf{r}_1) = \left. \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right|_{\mathbf{r}_2} + V(\mathbf{r}_2) = \text{állandó} \quad (3.21)$$

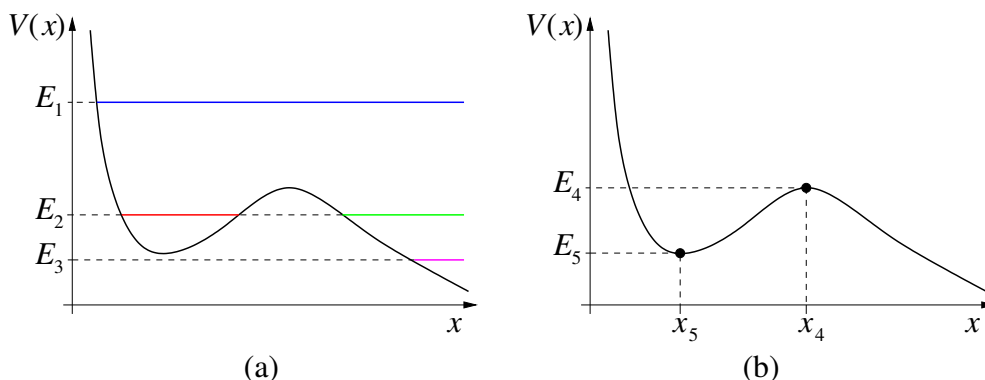
Ez természetesen a tér bármelyik két pontjára igaz. Tehát létezik egy skalár mennyiség, amely a mozgás során állandó marad. Ennek a neve a tömegpont mechanikai energiája, azaz:

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{állandó} \quad (3.22)$$

Ez a mechanikai energia megmaradásának tétele. Mivel az E_{mech} mechanikai összenergia a mozgás során nem változik az ilyen erőtereket konzervatív erőtérek nevezzük.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen megkötéseket jelent a tömegpont mozgására, illetve tartózkodási helyére a mechanikai energia megmaradásának tétele. Vizsgáljuk az egydimenziós problémát. Ekkor

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \quad (3.23)$$



3.2. ábra. (a) Különböző energiákhoz tartozó klasszikusan megengedett tartományok: kék, zöld, lila: nem kötött állapot, piros: kötött állapot. A szaggatott részek nem megengedett tartományok. (b) egyensúlyi állapotok x_4 instabil, x_5 stabil.

Klasszikusan, a tömegpont nem tartózkodhat olyan helyeken, ahol a potenciál nagyobb értéket vesz fel, mint a tömegpont mechanikai energiája. Ezek a részek a teret úgynevezett klasszikusan megengedett tartományokra tagolják, ahol a potenciálfüggvény nem nagyobb, mint a tömegpont mechanikai energiája $V(x) \leq E$ és ahol a tömegpont előfordulhat.

Egy tömegpont kötött állapotban van, ha véges térrészben tartózkodhat. Például a 3.2 (a) ábrán az E_2 energiához tartozó pirossal jelölt tartománya. Ellenkező esetben nem kötött állapotról beszélünk (3.2 (a) ábrán a kék, zöld és lila részek).

Amennyiben a potenciálnak extrémuma van egy pontban és a tömegpont mechanikai energiája pont megegyezik az itt felvett potenciális energiával (lásd 3.2 (b) ábra), egyensúlyi helyzetről beszélünk. Az egyensúlyi helyzet lehet *stabil*, ha a potenciál második deriváltja pozitív ebben a pontban, illetve *instabil* ellenkező esetben.

3.5. Disszipatív erők. A munkatétel általánosítása

Nem konzervatív mozgás legegyszerűbb példája az egyszerű csúszó súrlódás. Ha egy tömegpont egy vízszintes lapon mozoghat, akkor a síklap és a tömegpont között egy állandó nagyságú súrlódó erő hat.

Az eddigi tanulmányainkból ez jól ismert jelenség. Azt is tudjuk, hogy a csúszó súrlódási erő függ a tömegpont mozgási állapotától, hiszen mindig a pillanatnyi elmozdulással ellentétes irányban hat, azaz egy sebességvektortól függő erőről van szó. Ennek matematikai alakja

$$\mathbf{F}_s = -\alpha(\mathbf{v}/v), \quad (3.24)$$

feltéve, hogy $v \neq 0$. Mivel a kinematikából tudjuk, hogy a sebességvektor mindig a pálya

érintőjével párhuzamos, ezért

$$\mathbf{F}_s = F_s \mathbf{e}_t \quad (3.25)$$

Számoljuk ki egy állandó nagyságú súrlódási erő munkáját egy zárt \mathcal{S} görbén

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}_s d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{S}} F_s \mathbf{e}_t d\mathbf{r} = F_s \oint_{\mathcal{S}} ds = F_s S, \quad (3.26)$$

ahol S a zárt \mathcal{S} görbe hossza. Azaz a súrlódási erő nem konzervatív erő. Nem definiálható egy hozzá tartozó potenciális energiafüggvény. Az ilyen mechanikai rendszereket disszipatív rendszereknek nevezzük és a ható erőket *disszipatív erők*nek. A súrlódási erő tehát disszipatív erő. Ha a tömegpontra egy \mathbf{F}_k konzervatív és egy \mathbf{F}_s disszipatív erő hat, akkor a munkatétel értelmében:

$$\left[\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} = [-V(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_s d\mathbf{r} \quad (3.27)$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$[E_{\text{kin}} + V(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_s d\mathbf{r} \quad (3.28)$$

Felhasználva a mechanikai energia fogalmát:

$$E(\mathbf{r}) - E(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_s d\mathbf{r} \quad (3.29)$$

Szavakban megfogalmazva: egy tömegpont mechanikai energiájának a megváltozása a ráható disszipatív erők munkájával egyenlő. Súrlódási erőknél ez mindig negatív. Ebben az esetben tehát a mechanikai energia nem egy megmaradó mennyiség.

Látni fogjuk majd, hogy makroszkopikus skálán definiált disszipatív erő(k) munkáját mikroszkopikus skálán lehet tömegpontok dinamikájaként is értelmezni. Azaz a mikroszkopikus skálán csak két energiafajta van: kinetikus- és potenciális energia.

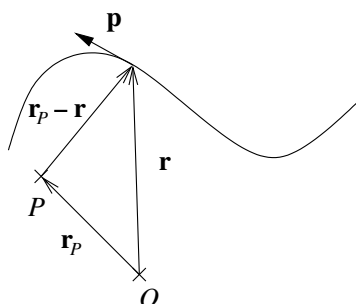
3.6. Egyetlen tömegpont perdülete

Az \mathbf{r} helyen lévő, \mathbf{p} impulzusú tömegpontnak egy adott, álló pontra vett perdületét (impulzusmomentumát) a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{L}_P = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{p}. \quad (3.30)$$

A definíciót a 3.3 ábra szemlélteti. A továbbiakban, ha csak külön nem említjük a P pont maga az O origó lesz, ahonnan az \mathbf{r} helyvektort is mérjük. Azaz

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (3.31)$$



3.3. ábra. A perdület definíciójához használt vektorok.

Induljunk ki a mozgásegyenletből majd szorozzuk meg balról az egyenletet vektoriálisan a helyvektorral:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{F} \\ \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{L}} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}}_{=0} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

ahol bevezettük az \mathbf{F} erőnek az origóra vett $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ forgatónyomatékát . A (3.32) egyenlet

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} \quad (3.33)$$

a *perdület*tétel.

3.7. Megmaradási tételek egyetlen tömegpont mozgása során

Az úgynevezett *megmaradási tételek* igen fontos és hasznos szerepet játszanak, nemcsak a mechanikában, hanem a fizika más fejezeteiben is. Ezen tételek első, legegyszerűbb megnyilvánulásait már egyetlen tömegpont dinamikája esetén is láthatjuk. Legyen a tömegpontra ható összes erők eredője $\mathbf{F} = 0$ zérus, akkor a Newton II. törvénye alapján az impulzusmegmaradás tételéhez jutunk:

$$\mathbf{p} = \text{állandó} \quad (3.34)$$

Ha a tömegpontra ható erők eredőjének a nyomatéka $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ zérus, akkor az impulzusmomentum-megmaradás tételét kapjuk:

$$\mathbf{L} = \text{állandó} \quad (3.35)$$

Ha a tömegpontra csak konzervatív erők hatnak, akkor a mechanikai energia megmaradás törvénye adódik:

$$E = \text{állandó} \quad (3.36)$$

Ezeket a mozgás során állandó dinamikai mennyiségeket *mozgásállandóknak* nevezzük. Összetett mechanikai rendszerek (tömegpontrendszerek) esetén ugyancsak megfogalmazhatók a fenti tételekkel analóg mozgásállandók. Sőt, megmutatható, hogy ezen megmaradási tételek valamilyen alapvető (tér és idő) szimmetria következményei. Ezekről a Mechanika elvei (5) fejezetben ejtünk majd egy-két fontos szót.

3.8. Tömegpont speciális térbeli mozgása: a centrális erőter

Tekintsünk egy olyan erőteret, amelyben a tömegpontra ható erő a tér minden pontjában egy megadott rögzített pont (legyen ez az origó) irányába mutat. A klasszikus mechanikai körülmények között előforduló erőhatások esetében nincs az erőnek időfüggése, tehát a centrális erőter matematikai alakja a következő:

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r \quad (3.37)$$

Ilyen például a (Newton-féle) gravitációs erőter de egy rugó végére erősített test is ilyen erőteret érzékel a mozgása során.

A centrális erőterek definíciójából következnek az alábbiak:

3.1. Következmény *Az izotropia miatt könnyen belátható, hogy ez az erőter konzervatív:*

$$\oint \mathbf{F}_c(\mathbf{r})d\mathbf{s} = \oint F(r)\mathbf{e}_r d\mathbf{s} = \oint F(r)dr = 0, \quad (3.38)$$

mivel skalár függvény körintegrálja mindig nulla. A levezetés során a zárt görbe menti infinitezimális elmozdulás-vektorokat most $d\mathbf{s}$ -el jelöltük. Kihasználtuk azt, hogy \mathbf{e}_r a sugárirányú egységvektor, ezért az $\mathbf{e}_r d\mathbf{s}$ skalárszorzat dr -t, azaz a centrumtól való infinitezimális távolodás mértékét adja. Az erőter tehát konzervatív, azaz létezik egy $V_c(r)$ potenciális energia, ami a (3.15) egyenlethez hasonlóan a következő formába írható:

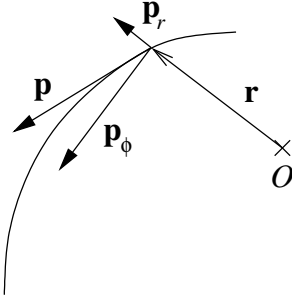
$$V_c(r) = V_0 - \int_{r_0}^r F(r)dr \quad (3.39)$$

A $V_c(r)$ ekvipotenciális felületei gömbök.

3.2. Következmény *A forgató nyomaték mindig nulla:*

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_c = F_c(r) \underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r}_{\mathbf{r} \parallel \mathbf{e}_r} = 0 \quad (3.40)$$

3.3. Következmény Centrális erőterben mozgó tömegpont síkmozgást végez. Mivel a forgatónyomaték mindig zérus, ezért a perdület állandó: $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mvr \times \mathbf{e}_t = \text{állandó}$ ezért a pályára merőleges egység vektor is állandó. Azaz a pálya síkja állandó, tehát a tömegpont síkmozgást végez.



3.4. ábra. Az impulzus felbontása polár koordináta-rendszerben

Mivel síkmozgásról van szó, célszerű síkbeli polár koordináta-rendszerben dolgoznunk.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_r + \mathbf{p}_\phi \quad (3.41)$$

A tömegpont mechanikai energiája kihasználva, hogy $p^2 = p_r^2 + p_\phi^2$ a következőképpen alakul:

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m} + V_c(r) \quad (3.42)$$

Az állandó nagyságú \mathbf{L} perdületből \mathbf{p}_ϕ kifejezhető

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (\underbrace{\mathbf{p}_r}_{\mathbf{p}_r \parallel \mathbf{r}} + \mathbf{p}_\phi) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\phi \quad (3.43)$$

mivel $\mathbf{r} \perp \mathbf{p}_\phi$, ezért $L = rp_\phi$. Ezt beírva az energia kifejezésébe, azt kapjuk, hogy

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{V_{\text{eff}}(r)} + V_c(r), \quad (3.44)$$

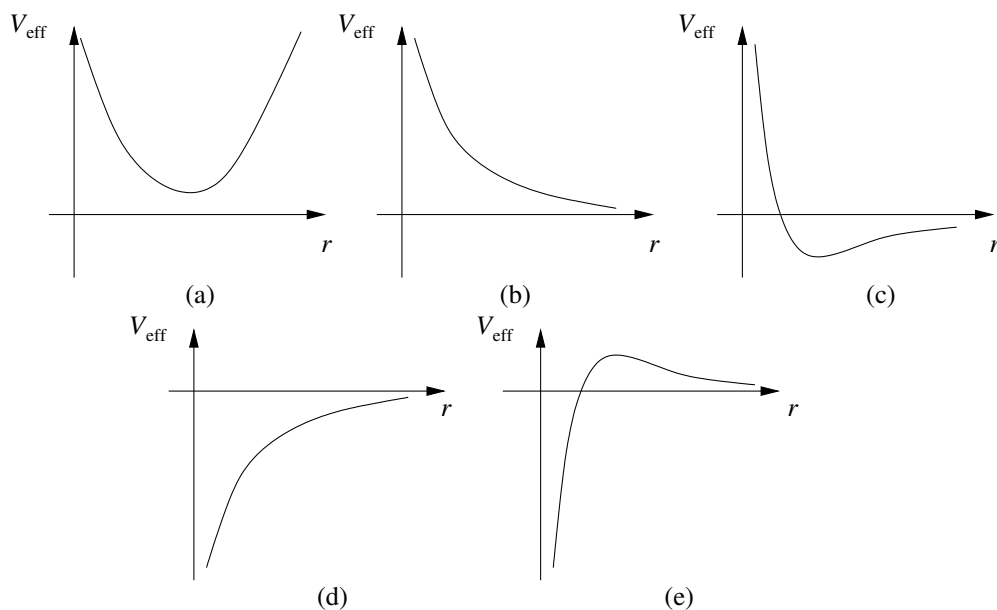
ahol az utolsó két tag csak az origótól vett távolságtól függ és egyesíthető egy *effektív potenciális energiában*:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V_c(r) = V_{\text{cf}}(r) + V_c(r) \quad (3.45)$$

Az újonnan bevezetett, első tag neve centrifugális potenciális energia. A centrifugális potenciális energia $\sim 1/r^2$ alakú taszító potenciál, az ehhez tartozó erő nagysága:

$$F_{\text{cf}} = -\frac{\partial V_{\text{cf}}}{\partial r} = m\omega^2 r \quad (3.46)$$

Fontos, hogy most egy új koordináta-rendszerre tértünk át, amelyben a tömegpont helyzetét egyetlen koordinátával a centrumból mért távolsággal jellemezzük, miközben a koordináta-rendszer mindig a test felé fordul.



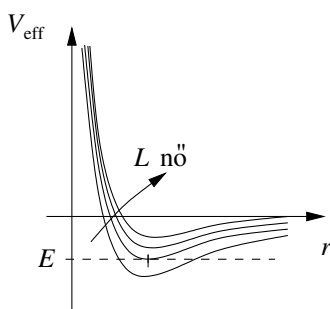
3.5. ábra. Az effektív potenciál lehetséges alakjai hatványfüggvény centrális potenciálban.

A $V_c(r)$ potenciáltól függően az effektív potenciál sokféle alakot vehet fel. Mivel a természetben általában ilyenek fordulnak elő, tegyük fel hogy a potenciál a sugárnak hatványfüggvénye $V_c(r) = \alpha r^\beta$. Ekkor az 3.5. ábrán látható alakokat veheti fel az effektív potenciál. β értékei a következők lehetnek:

β	α	Effektív potenciál 3.5. ábra
$\beta > 0$	$\alpha > 0$	(a)
$\beta \leq 0$	$\alpha > 0$	(b)
$0 > \beta > -2$	$\alpha < 0$	(c)
$\beta = -2$	$\alpha < -L^2/2m$	(d)
$\beta < -2$	$\alpha < 0$	(e)

A különböző potenciálok hatása leginkább a szóráselméletben kap nagy jelentőséget. Érdekes megfigyelni, hogy két esetben (a) és (c) létrejöhet kötött állapot. Ez különleges jelentőséggel bír, mivel ez esetben zárt pályákat figyelhetünk meg.

Az (a) esetre, legegyszerűbb példa a harmonikus oszcillátor potenciál függvénye $V_c(r) = \alpha r^2$. Ezt a potenciált érzi egy rugó végére erősített test. Itt csak kötött pályák figyelhetők meg, sőt visszatérve Descartes koordináta-rendszerre könnyen belátható, hogy a pályák általában ellipszis alakúak, de ha a mechanikai energia pont az effektív potenciál minimumával egyenlő, akkor a pálya kör alakú lesz, hiszen ekkor csak egy sugár megengedett a tömegpont számára.



3.6. ábra. Az effektív potenciál gravitációs kölcsönhatás esetén különböző perdületű tömegpontra.

A (c) esetre a legtipikusabb példa a gravitációs potenciál $V_c(r) = -|\alpha|/r$. Kötött állapot csak $E < 0$ esetén jöhet létre. Mint az a 3.6 ábrán látható kötött állapotok esetén azonos energián mindig a körpálya perdülete a legnagyobb. Hasonlóan adott perdület esetén a körpálya energiája a legalacsonyabb.

Határozzuk meg a centrális erőterben mozgó tömegpont pályájának alakját! Induljunk ki a mechanikai energiából:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm|\dot{\mathbf{r}}| = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{\text{eff}}(r)]} \quad (3.47)$$

A szögsebességet a perdületből tudjuk meghatározni:

$$L = mr^2\omega = mr^2\dot{\phi}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad (3.48)$$

Osszuk el egymással a (3.47) és (3.48) egyenleteket:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{\pm r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{eff}})}} \quad (3.49)$$

Ezek után V_{eff} ismeretében a $\phi(r)$, majd ebből az $r(\phi)$ meghatározható. Ránézve az egyenletekre könnyen belátható, hogy analitikus megoldások csak speciális $V_c(r)$ -nél adódnak. Erre nézzünk két példát!

3.1. Feladat *Ha nincs semmilyen kölcsönhatás, azaz $V_c(r) = 0$, akkor a pálya Newton I értelmében a pálya egyenesvonalú egyenletes mozgás. Ezt szeretnénk visszakapni a (3.49) egyenlet segítségével.*

Legyen az m tömegű test sebessége v , ekkor $E = mv^2/2$. A sebesség által meghatározott egyenes és az origó távolsága d , ekkor $L = mdv$. A (3.49) egyenlet a következőképpen alakul:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{\pm r^2 \sqrt{2m \left(E - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}} = \frac{d}{\pm r^2 \sqrt{1 - \frac{d^2}{r^2}}} = \frac{d \arccos(d/r)}{dr} \quad (3.50)$$

Tehát azt kaptuk, hogy $d = r \cos \phi$, ez pedig tényleg az origótól d távolságra lévő egyenes egyenlete.

3.2. Feladat *Gravitáció esetén $V_c(r) = -\alpha/r$ a pályák kúpszeletek. Csináljuk fordítva a bizonyítást. Tudjuk, hogy a kúpszelet egyenlete a következő [1]*

$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos \phi} \quad (3.51)$$

Ebből számolható a ϕ távolság szerinti deriváltja:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{k}{r^2 \sqrt{e^2 - 1 - k^2/r^2 + 2k/r}} \quad (3.52)$$

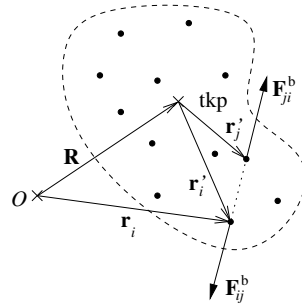
Amiből (3.49) egyenletet kihasználva azt kapjuk, hogy

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2 m}} \quad (3.53)$$

ami $e > 0$ esetén hiperbolát, $E = 0$ esetén parabolát, $E < 0$ esetén ellipszist ad és jól látható, hogy van egy minimális energia, amikor a pálya kör alakú. Adott L perdület esetén ennél kisebb energiával nem létezik pálya, azaz $E \geq -\alpha^2 m / 2L^2$.

4. fejezet

Tömegpont-rendszerek



4.1. ábra. Pontrendszer szemléltetése. A tömegpontok helyvektora az origóból a \mathbf{r}_i , az \mathbf{R} tömegközéppontból a \mathbf{r}'_i helyvektor. Az i tömegpontból a j tömegpontra ható erőt a \mathbf{F}_{ji}^b vektor jelöli.

Egy N tömegpontból álló rendszert tömegpont-rendszernek nevezünk (lásd 4.1 ábra). Jelölje az i -edik tömegpont tömegét m_i , helyvektorát \mathbf{r}_i . Vezessük be továbbá a pontrendszer

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (4.1)$$

össztömegét, valamint a tömegközéppont

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (4.2)$$

helyvektorát. Ha a tömegpontok tömege állandó, akkor (4.2) deriválása után a tömeg-

középpont sebessége és gyorsulása:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \\ \ddot{\mathbf{R}} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Azt a külső vonatkoztatási rendszert, amelyben a pontrendszer megfigyelését végezzük, laboratóriumi rendszernek (L) nevezzük. Emellett szokás bevezetni a tömegközépponti-rendszert (TK), ami olyan vonatkoztatási rendszer, amelynek origója a tömegközéppont. A két rendszerben a tömegpont helyvektorai között fenn áll az

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i\tag{4.4}$$

összefüggés, ahol \mathbf{r}_i a laboratóriumi-rendszerbeli, \mathbf{r}'_i pedig a tömegközépponti-rendszerbeli helyvektorok. Nyilvánvalóan tömegközépponti rendszerben a tömegközéppont helyvektora a nullvektor, azaz $\mathbf{R} = \dot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$. Ezt (4.2) és (4.3) egyenletekbe helyettesítve kapjuk, hogy:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{0}.\tag{4.5}$$

Egy tömegpontra ható erő két összetevőből áll: a rendszeren kívülről ható külső erőkből és a rendszer tagjai által kifejtett belső erőkből. Ez alapján az i -edik tömegpontra ható eredő erő:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^k + \mathbf{F}_i^b = \mathbf{F}_i^k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b,\tag{4.6}$$

ahol \mathbf{F}_i^k a tömegpontra ható külső erők eredője, \mathbf{F}_i^b a tömegpontra ható belső erők eredője, \mathbf{F}_{ij}^b pedig a j -edik tömegpont által az i -edik tömegpontra kifejtett belső erő. Így az i -edik tömegpontra vonatkozó Newton-féle mozgásegyenlet:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b,\tag{4.7}$$

ahol $i = 1, \dots, N$. (4.7) egy $3N$ egyenletből álló másodrendű differenciálegyenlet-rendszer, amely az $\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_{0i}$ és $\dot{\mathbf{r}}_i(0) = \mathbf{v}_{0i}$ ($i = 1, \dots, N$) kezdeti feltételek ismeretében elméletileg megoldható. Mivel azonban a fenti egyenletben a belső erők sokszor nem lineárisan függenek a tömegpontok távolságától, ezért általános esetben az egyenletrendszer megoldása már $N = 3$ esetén sem lehetséges zárt alakban. Azonban léteznek a pontrendszernek olyan általános dinamikai sajátosságai, amelyek nem függenek a tömegpontok

közötti kölcsönhatásoktól. Ezek (éppen az általánosságuk miatt) a részletes dinamikát nem tartalmazzák, de makroszkopikus skálán fontos ismereteket nyújtanak számunkra a rendszer fő dinamikai sajátosságairól.

4.1. Tömegközéppont-tétel

Induljunk ki a rendszer (4.7) mozgásegyenletéből és összegezzük azt valamennyi tömegpontra:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^k + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b. \quad (4.8)$$

A bal oldal (4.3) alapján $M\ddot{\mathbf{R}}$ -ként írható fel. A jobb oldal első tagja a rendszerre ható külső erők \mathbf{F}^k eredője. A második tagban az összes belső erő szerepel, vagyis szerepel benne minden \mathbf{F}_{ij} erőnek az \mathbf{F}_{ji} ellenerője, melyek Newton III. törvénye szerint kiejtik egymást, így ez az összeg zérus. Ezzel az (4.8) mozgásegyenlet a következő alakot ölti:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^k. \quad (4.9)$$

Ez a *tömegközéppont-tétel*, amely azt fejezi ki, hogy egy pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer teljes tömege ebbe a pontba lenne sűrítve és a külső erők eredője a tömegközéppontra hatna. A tömegközéppont-tétel miatt használható jól a tömegpont fogalma.

4.2. Pontrendszer impulzustétele

Az (4.7) egyenletben felhasználva, hogy $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$ és ismét összegezve a tömegpontokra:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^k + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b, \quad (4.10)$$

ahol a bal oldal ezúttal a pontrendszer \mathbf{P} összipulzusának időbeli változása, mellyel a fenti egyenlet a

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^k. \quad (4.11)$$

alakba írható.

Ez a *pontrendszer impulzustétele*, mely azt fejezi ki, hogy egy pontrendszer összipulzusát csak a külső erők változtathatják meg. Ha a külső erők eredője zérus, a rendszer összipulzusa időbeli állandó marad.

4.3. Pontrendszer munkatétele

A tömegpont munkatételének levezetése során alkalmazott módszer mintájára szorozzuk be az i -edik tömegpontra vonatkozó (4.7) mozgásegyenletet $\dot{\mathbf{r}}_i$ -tal:

$$\mathbf{F}_i^k \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b \dot{\mathbf{r}}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \dot{K}_i, \quad (4.12)$$

ahol K_i az i -edik tömegpont kinetikus energiája. Ezt összegezve az összes tömegpontra és a derivált linearitását kihasználva:

$$\sum_{i=1}^N \dot{K}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N K_i = \dot{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^k \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (4.13)$$

ahol K a tömegpont-rendszer teljes kinetikus energiája.

Vizsgáljuk meg az (4.13) egyenlet tagjait külön-külön: $\dot{\mathbf{r}}_i$ helyébe helyettesítsük (4.4)-t, majd a zárójelek felbontása után használjuk fel a (4.5) összefüggéseket. A rendszer kinetikus energiája:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i \right)^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 \sum_{i=1}^N m_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'^2_i + \underbrace{2 \dot{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i}_{=0}. \quad (4.14)$$

Tömegközépponti rendszerben a tömegpont helyvektora, és annak idő szerinti deriváltja is zérus, ezért nulla az utolsó tag. Tovább írva a kifejezést:

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}'^2_i = K_{\text{TR}} + K^b. \quad (4.15)$$

Itt K_{TR} a *transzlációs kinetikus energia*, amely a tömegközéppont kinetikus energiájának felel meg, K^b a *belső kinetikus energia*, amely a tömegpontok tömegközépponthez viszonyított sebességéből származik. Ez utóbbi adódhat rendezetlen mozgásból (például hőmozgásból), vagy rendezett mozgásból (például forgómozgásból).

A (4.13) egyenlet jobb oldalának első tagja:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^k \left(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i \right) = \dot{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^k + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^k \dot{\mathbf{r}}'_i = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{F}^k + \sum_{i=1}^N P_i^k = P_{\text{TKP}}^k + P^k, \quad (4.16)$$

ahol P_{TKP}^k a külső erőknek a tömegközéppontra vonatkozó látszólagos teljesítménye, P^k a külső erők összteljesítménye a tömegközépponti rendszerben.

A (4.13) egyenlet jobb oldalának második tagja felhasználva, hogy $\mathbf{F}_{ij}^b = -\mathbf{F}_{ji}^b$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b \cdot \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ji}^b \cdot \dot{\mathbf{r}}_j \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}^b \dot{\mathbf{r}}_{ij} = P^b, \end{aligned} \quad (4.17)$$

ahol P^b a belső erők összteljesítménye tömegközépponti rendszerben, $\dot{\mathbf{r}}_{ij}$ pedig az i -edik tömegpontból a j -edik tömegpontba mutató vektor időderiváltja.

Az utóbbi eredmények felhasználásával a (4.13) egyenlet egyszerűbb alakra hozható:

$$\dot{K}_{\text{TR}} + \dot{K}^b = P_{\text{TKP}}^k + P^k + P^b. \quad (4.18)$$

A további egyszerűsítés érdekében a (4.9) tömegközéppont-tétel esetében is kövessük a tömegpont munkatételének levezetése során alkalmazott módszert és szorozzunk be $\dot{\mathbf{R}}$ -tal:

$$P_{\text{TKP}}^k = \mathbf{F}^k \dot{\mathbf{R}} = M \ddot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 \right) = \dot{K}_{\text{TR}} \quad (4.19)$$

(4.18)–(4.19) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{\text{TR}} &= P_{\text{TKP}}^k \\ \dot{K}^b &= P^k + P^b \end{aligned} \quad (4.20)$$

Vagyis a pontrendszerre vonatkozó differenciális munkatétel két állítást tesz:

1. A pontrendszer translációs kinetikus energiájának időbeli változása a külső erők tömegközéppontra vonatkozó látszólagos teljesítményével egyenlő. Ha ez utóbbi zérus, akkor a rendszer translációs kinetikus energiája időben állandó marad.
2. A pontrendszer belső kinetikus energiájának időbeli változása a belső- és külső erők tömegközépponti-rendszerbeli összteljesítményének összegével egyenlő. Ha ez utóbbiak nullák, akkor a rendszer belső kinetikus energiája időben állandó marad.

Ha a belső erők konzervatívak, azaz létezik potenciális energia:

$$P^b = \dot{W}^b = -\dot{V}^b, \quad (4.21)$$

amit (4.20)-be helyettesítve:

$$\dot{K}^b = P^k - \dot{V}^b \implies P^k = \frac{d}{dt} (K^b + V^b) = \frac{d}{dt} U, \quad (4.22)$$

ahol U a rendszer teljes belső energiája. Az utóbbi eredmény szerint a rendszer teljes belső energiájának időbeli változása a külső erők tömegközépponti-rendszerbeli összteljesítményével egyenlő.

4.4. Pontrendszer perdülettéttele

Írjuk fel az i -edik tömegpont origóra vett perdületét, majd a tömegpontokra való összegzést követően \mathbf{r}_i helyébe helyettesítsük (4.4)-t és használjuk fel a (4.5) összefüggéseket:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) = \quad (4.23)$$

$$= \mathbf{R} \times m_i \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i, \quad (4.24)$$

amit összegezve valamennyi tömegpontra és felhasználva a (4.5) összefüggéseket:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) = \quad (4.25)$$

$$= \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^N m_i + \mathbf{R} \times \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}'_i}_{=0} - \dot{\mathbf{R}} \times \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i}_{=0} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \quad (4.26)$$

$$= \mathbf{R} \times M \dot{\mathbf{R}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{L}_{\text{TKP}} + \mathbf{S}, \quad (4.27)$$

ahol \mathbf{L}_{TKP} a tömegközéppont origóra vett perdülete, \mathbf{S} a belső perdület (spin), amely a tömegpontoknak tömegközépponti-rendszerben a tömegközéppontra vett összperdülete.

A rendszer perdületváltozása:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{TKP}} + \dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{L}}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (4.28)$$

ahol kihasználtuk, hogy $\dot{\mathbf{r}}_i \parallel \mathbf{p}_i$, így keresztszorzatuk zérus. (4.28) jobb oldalán \mathbf{r}_i helyébe (4.4)-t helyettesítve, a tömegpontra ható erőt pedig külső- és belső erők összegeként felírva, majd felhasználva az (4.5) összefüggéseket:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{F}_i^k + \mathbf{F}_i^b) = \quad (4.29)$$

$$= \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^k + \mathbf{R} \times \underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^b}_{=0} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^k + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^b = \quad (4.30)$$

$$= \mathbf{R} \times \mathbf{F}^k + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}^b = \quad (4.31)$$

$$= \mathbf{M}_{\text{TKP}}^k + \mathbf{M}^k + \mathbf{M}^b, \quad (4.32)$$

ahol $\mathbf{M}_{\text{TKP}}^k$ a külső erők origóra vonatkozó, tömegközéppontra ható forgatónyomatéka, \mathbf{M}^k a külső erők forgatónyomatéka tömegközépponti-rendszerben, \mathbf{M}^b pedig a belső erők forgatónyomatéka tömegközépponti-rendszerben. Ha a tömegpontok között ható erők centrálisak, azaz $\mathbf{r}_{ij} \parallel \mathbf{F}_{ij}^b$, az utolsó tag eltűnik. Ekkor a (4.28) egyenlet a következőképpen írható:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{TKP}} + \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{M}_{\text{TKP}}^k + \mathbf{M}^k. \quad (4.33)$$

A további egyszerűsítés érdekében deriváljuk idő szerint az \mathbf{L}_{TKP} -t definiáló összefüggést:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{TKP}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{R}}) = \dot{\mathbf{R}} \times M\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}^k = \mathbf{M}_{\text{TKP}}^k, \quad (4.34)$$

amit (4.33)-ben felhasználva:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{TKP}} = \mathbf{M}_{\text{TKP}}^k \quad (4.35a)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{M}^k \quad (4.35b)$$

Tehát centrális erők esetében a pontrendszerre vonatkozó perdülettel a következő két állítást teszi:

1. Pontrendszer tömegközéppontjának origóra vett perdületének időbeli változása a külső erők tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomatékával egyenlő. Ha ez utóbbi zérus, akkor a tömegközéppont origóra vett perdülete időben állandó marad.
2. Pontrendszer belső perdületének időbeli változása a külső erők tömegközépponti-rendszerbeli forgatónyomatékával egyenlő. Ha ez utóbbi zérus, akkor a rendszer belső perdülete időben állandó marad.

5. fejezet

A mechanika elvei

Mint azt láttuk a klasszikus mechanika egy „axiomatikus” modell a makroszkopikus testek (dinamikai) viselkedésének a megértéséhez. Természetesen itt az axióma nem a matematikai szigorúsággal értendő. Pusztán annyit jelent, hogy kísérleti megfigyeléseken alapuló tények sokaságából kiválasztjuk azt a lehető legkisebb számút, amelyek segítségével a többi (lehetőleg összes) mechanikai jelenség logikusan levezethető. A logikusság itt matematikai formalizmusban mutatkozik meg.

A Newton-törvények (vagy Newton axiómák) adják a klasszikus mechanika alaptörvényeit. A Newtont követő fizikusok (D’Alambert, Euler, Lagrange, Hamilton, . . .) megpróbálták a mozgástörvényt más formában is megfogalmazni. Ezeket ma a „mechanika elvei”-ként tartjuk számon.

Ezek az elvek nem lépnek túl a newtoni mechanika határain, így ha van potenciál ekvivalens megfogalmazásai a klasszikus mechanikai modelljeinknek. Mégis van egy fontos sajátosságuk, amely a Newton-féle mozgástörvényekkel szemben nagy elvi előnynek bizonyult. Ez pedig az, hogy olyan formában fogalmazzák meg a dinamika alaptörvényét, amely közvetlenül általánosítható a mikrofizika irányába. Mindez természetesen csak utólag derült ki. A kísérleti tapasztalatok hatására, a XX. század első évtizedeiben, ezen elméleti alapok tették lehetővé a kvantummechanika megszületését.

5.1. Általános koordináták

Egy N tömegpontból álló, d dimenziós rendszer állapotát dN darab Descartes-koordinátával jellemezhetjük. Ha a rendszerben valamilyen kényszer feltétel, azaz koordináták közti kapcsolat van jelen, akkor a koordináták nem lesznek egymástól függetlenek, így s darab *kényszer* esetén a koordináták közti összefüggéseket s darab egyenlet fogja leírni. Így a jellemzéshez szükséges szabad paraméterek számát, vagyis a rendszer *szabadsági fokát* az

$$f = dN - s \tag{5.1}$$

összefüggés adja meg.

A Descartes-koordináták helyett azonban használhatjuk a rendszer tetszőleges f darab, független paraméterét, amelyek a rendszer állapotát egyértelműen leírják. Ezek az úgynevezett *általános koordináták*.

5.2. A legkisebb hatás elve – Variációszámítás

A következőkben egy axiómát fogunk kimondani, először azonban definiáljuk a szükséges alapfogalmakat.

5.1. Definíció (Hatásintegrál) Azt az $S[\cdot]$ funkcionált, amit az

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (5.2)$$

összefüggés definiál hatásintegrálnak nevezzük, ahol az

$$\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2 \quad (5.3b)$$

összefüggések a peremfeltételek.

A fenti definícióban szereplő \mathcal{L} függvény az úgynevezett *Lagrange függvény*, mely egyértelműen jellemzi a rendszer mozgását. A lehetséges $\mathbf{q}(t)$ trajektóriák közül a valószínűségben az fog megvalósulni, amelyik esetén a hatásintegrál minimális. Ez az axióma a *legkisebb hatás elve*.

A fent megfogalmazott feladat a *variációszámítás alapfeladata*, megoldásának egyik lehetséges módját az Euler-Lagrange formula adja meg.

5.2. Tétel (Euler-Lagrange formula) A fenti módon definiált hatásfüggvény minimális, ha bármely $i = 1, \dots, k$ teljesül a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5.4)$$

összefüggés.

Bizonyítás. A bizonyításhoz a szélsőérték számításból használt analógiát fogjuk használni. Egy f függvénynek szélsőértéke van azon a helyen, ahol a függvény értékét infinitezimálisan megváltoztatva a függvény értéke nem változik, tehát $df = 0$. Hasonlóan egy S funkcionál minimális (v. maximális), ha az argumentumában szereplő $\mathbf{q}(t)$ függvényhez

egy „kicsi” $\delta\mathbf{q}(t)$ függvénnyel megváltoztatjuk, akkor az S ily módon definiált megváltozása, úgynevezett *variációja*, nullával egyenlő, tehát $\delta S = 0$. Felhasználva S definícióját, a variáció átírható a

$$\delta S = S[\mathbf{q} + d\mathbf{q}] - S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} [\mathcal{L}(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)] dt = 0 \quad (5.5)$$

alakba. Ezt $\delta\mathbf{q}$ és $\delta\dot{\mathbf{q}}$ szerint sorba fejtjük első rendig:

$$\begin{aligned} \delta S &\approx \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

A második tagot parciálisan integrálhatjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (5.7)$$

Mivel a peremfeltételeknek $\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}$ -ra is teljesülniük kell, ezért $\delta\mathbf{q}(t_{1,2}) = 0$. Ez alapján a fenti képlet első tagja nullával egyenlő. Az így kapott eredményt visszahelyettesítve a

$$\delta S \approx \sum_{i=1}^f \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0 \quad (5.8)$$

összefüggést kapjuk, ami akkor és csak akkor teljesül, ha bármely δq_i -re, ahol $(i = 1, \dots, f)$ ha a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (5.9)$$

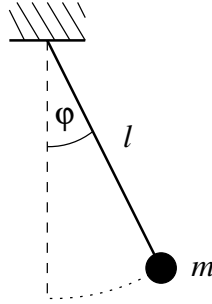
Euler-Lagrange differenciálegyenlet teljesül. \square

Megmutatható, hogy konzervatív rendszerben a Lagrange függvény nem tartalmaz explicit időfüggést és a rendszer kinetikus és potenciális energiájának különbségével egyezik meg:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}). \quad (5.10)$$

5.1. Feladat (Matematikai inga)

Írjuk fel a matematikai inga mozgási energiáját a Lagrange-formalizmus felhasználásával (5.1 ábra)! A rendszer két dimenziós, egy tömegpontból áll és egy kényszer van jelen ($\ell = \text{állandó}$), így a szabadsági fokok száma: $f = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, így egy általános



5.1. ábra. A matematikai inga.

koordinátát választhatunk szabadon. A geometriai elrendezés miatt ebben az esetben legcélszerűbb a φ szögelfordulást választani. Írjuk fel az inga mozgásegyenletét először Descartes-koordinátákkal:

$$K(x, y) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (5.11)$$

Majd kihasználva a kényszerfeltételt áttérhetünk φ általános koordinátára:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \varphi \\ y &= l \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5.12)$$

ezt felhasználva a kinetikus energia a

$$K(\dot{\varphi}, \varphi) = \frac{1}{2}m [(\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{\varphi} \cos \varphi)^2] = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 \quad (5.13)$$

alakban írható fel. A potenciális energia hasonlóan határozható meg:

$$V(x, y) = -mgy = -mgl \cos \varphi, \quad (5.14)$$

ahol a potenciális energia nullszintjének a felfüggesztési ponton átmenő vízszintes síkot választottuk. Tehát a matematikai inga Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L}(\dot{\varphi}, \varphi) = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + mgl \cos \varphi. \quad (5.15)$$

Ezt behelyettesítve (5.9) egyenletbe megkapjuk az inga jól ismert mozgásegyenletét:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = -mgl \sin \varphi - \frac{d}{dt} m l^2 \dot{\varphi} \\ &\quad -mgl \sin \varphi = m l^2 \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.3. Hamilton-formalizmus

A *Hamilton-formalizmus* jelentős újrafogalmazása a klasszikus mechanikának, amelynek igazi fontossága a kvantum mechanika leírásánál kerül előtérbe.

Először vezessük az *általános impulzust* az alábbi módon:

5.3. Definíció (Általános impulzus) *A q_i általános koordinátához tartozó p_i általános impulzus a*

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.17)$$

összefüggéssel leírt mennyiség.

A fenti definíciót behelyettesítve az Euler-Lagrange egyenletbe a következőhöz jutunk:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \quad (5.18)$$

Ezután írjuk fel a Lagrange-függvény teljes differenciálját, felhasználva az általános impulzus definícióját:

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \sum_{i=1}^f \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^f p_i d\dot{q}_i. \quad (5.19)$$

Felhasználva a szorzat függvény differenciálási szabályát a fenti egyenletet az alábbi módon alakíthatjuk át:

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^f \dot{p}_i dq_i + d\left(\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^f \dot{q}_i dp_i. \quad (5.20)$$

Definiáljuk egy rendszer *Hamilton-függvényét* a rendszer teljes energiájával, de úgy hogy az \mathbf{q} és \mathbf{p} változókkal fejezzük ki:

5.4. Definíció (Hamilton-függvény) *Egy mechanikai rendszer \mathcal{H} Hamilton-függvénye tehát*

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (5.21)$$

Az 5.10 egyenlet alapján, konzervatív rendszer esetében a Hamilton-függvény az alábbiak szerint írható:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (5.22)$$

A Hamilton-függvény segítségével az alábbi alakhoz jutunk:

$$d\left(\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}\right) = \sum_{i=1}^f \dot{p}_i dq_i - \sum_{i=1}^f \dot{q}_i dp_i = d\mathcal{H}. \quad (5.23)$$

Ezek alapján megkaphatjuk az úgynevezett *Hamilton-féle kanonikus egyenleteket*:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \quad (5.24a)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.24b)$$

ezek $2f$ számú elsőrendű differenciálegyenletet jelentenek.

Tekintsük ismét a matematikai ingát, írjuk fel a φ -hez tartozó általános impulzust:

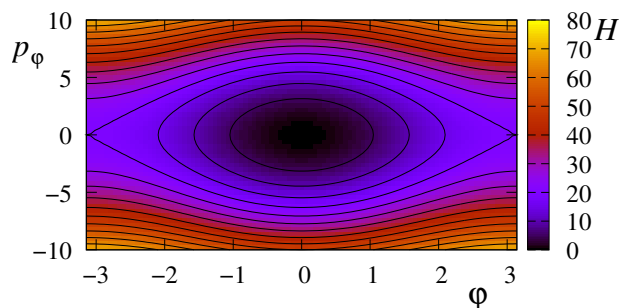
$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2 \dot{\varphi}. \quad (5.25)$$

Ez alapján felírhatjuk a matematikai inga Hamilton-függvényét:

$$E(\varphi, \dot{\varphi}) = m(\ell\dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2}m(\ell\dot{\varphi})^2 - mgl \cos \varphi = \frac{p_\varphi^2}{2m\ell^2} - mgl \cos \varphi = \mathcal{H}(\varphi, p_\varphi). \quad (5.26)$$

A Hamilton-függvény szintvonalai (illetve magasabb dimenzióban szintfelületei) az azonos energiájú állapotokat jelölik. Ez a mechanikai rendszer *energiatérképe*.

Felrajzolva a matematikai inga energiatérképét (5.2 ábra) a tapasztalatnak megfelelő eredményeket kapunk.

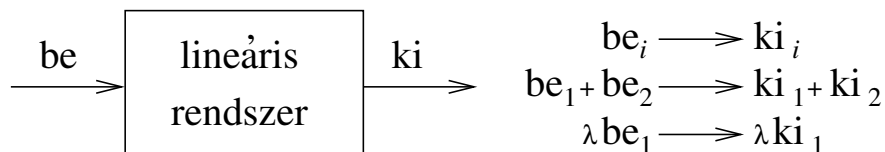


5.2. ábra. A matematikai inga energiatérképe.

6. fejezet

Lineáris rendszerek analízise - lineáris mechanikai oszcillátor

6.1. Lineáris rendszer definíciója



6.1. ábra. Lineáris rendszer.

Mielőtt elkezdenénk a csillapított harmonikus oszcillátor vizsgálatát, ismételjük át még egyszer mit is értünk lineáris rendszeren! A lineáris függvény definíciója a következő:

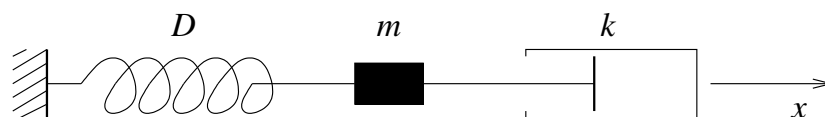
$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(ax) &= af(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

A lineáris rendszer definíciója ezzel teljesen analóg, a bemenet és a kimenet között van lineáris kapcsolat, bármi legyen is a bemenet, vagy a kimenet. Amint majd látni fogjuk a harmonikus csillapított oszcillátor esetében ezek függvények lesznek.

6.2. Harmonikus oszcillátor

Felmerülhet a kérdés, hogy miképpen kerül egy egyszerű, speciális mechanikai rendszer az általános érdeklődésünk középpontjába (és a fizikus indulóba). A válasz egyszerű. A lineáris mechanikai oszcillátornak olyan tulajdonságai vannak, amelyek alkalmassá teszik

öt arra, hogy a példáján keresztül betekintést nyerjünk a lineáris rendszerek jellegzetes viselkedésébe. Mivel a feladat szemléletes, hétköznapi, makroszkopikus tapasztalatokon alapul, ezért könnyen megérthető. Ennek kapcsán pedig általános törvényeket ismerhetünk fel. Ezek aztán a fizika más területein is sikerrel alkalmazhatók.



6.2. ábra. Csillapított harmonikus oszcillátor

Tekintsük az 6.2 ábrán látható csillapított harmonikus mechanikai oszcillátort. Ennek egy konkrét megvalósítása a következő. Legyen egy m tömegű pont, amelyet egy rugóval az x tengely origójához erősítettünk. A rugó nyugalmi hossza zérus és erősségét a D rugóállandóval jellemezzük. Hasson a tömegpontra egy sebességgel arányos csillapító erő is a csillapítás erőssége legyen k . A mozgásegyenlet egy dimenzióban a következő:

$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} \quad (6.2)$$

Érdeemes átrendezni az egyenletet:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \quad (6.3)$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (6.4)$$

ahol bevezettük a

$$\alpha = \frac{k}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (6.5)$$

A (6.4) egyenlet alakját tekintve egy *állandó együtthatójú, másodrendű, közönséges, lineáris, homogén differenciálegyenlet*. *Állandó együtthatójú*, mert $\{\alpha, \omega_0\}$ időtől független állandók. *közönséges*, mert csak egy változós függvény $x(t)$ szerepel benne *másodrendű* mert x második deriváltját tartalmazza, *lineáris*, mert a keresett $x(t)$ függvényen csak lineáris matematikai műveleteket hajtunk végre (nincsen benne pl. x^2 , $\sin(x)$ kifejezés). Végül azért *homogén*, mert az egyenlet jobb oldalán 0 szerepel, azaz nincs x -ben konstans tag. Ha ott egy tetszőleges előre megadott $f(t)$ függvény volna, akkor az egyenlet *inhomogén* lenne. Ilyenekkel később még foglalkozunk. Mint majd látni fogjuk a fenti elnevezések önmagukon túlmutató jelentőséggel bírnak és többségüket ki fogjuk használni.

Mivel az egyenlet másodrendű differenciálegyenlet ezért két kezdeti feltételre van szükségünk $x(t)$ meghatározásához:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (6.6)$$

A (6.4) egyenlet megoldását a következő alakban keressük:

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (6.7)$$

ekkor ugyanis $\dot{x} = \lambda \exp(\lambda t)$, illetve $\ddot{x} = \lambda^2 \exp(\lambda t)$, és így

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2)}_{=0} e^{\lambda t} = 0. \quad (6.8)$$

Mivel a fenti egyenletnek tetszőleges időpontban igaznak kell lennie, ezért a zárójelben szereplő kifejezésnek nullának kell lennie:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (6.9)$$

Amint látható ez egy λ -ban másodfokú egyenletre vezetett. Megoldása:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (6.10)$$

Az egyenletnek mindkét λ megoldása, mivel (6.4) egyenlet lineáris ezért az egyenlet megoldása a két lambdához tartozó megoldás lineáris kombinációja lesz:

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.11)$$

ahol $\{a_1, a_2\}$ együtthatók a kezdeti feltételből határozhatók meg.

Jól látható, hogy a fenti általános megoldással vannak problémák, mivel bizonyos esetben $\lambda_1 = \lambda_2$, illetve az $x(t)$ helyfüggvény akár komplexnek is adódhat. Ezeket az eseteket külön megvizsgáljuk.

6.2.1. Túlszillapítás

Tegyük fel, hogy $\alpha > \omega_0$, azaz $k > \sqrt{4mD}$. Ebben az esetben a (6.10) egyenlet megoldásai különbözőek és valósak és ráadásul negatívak:

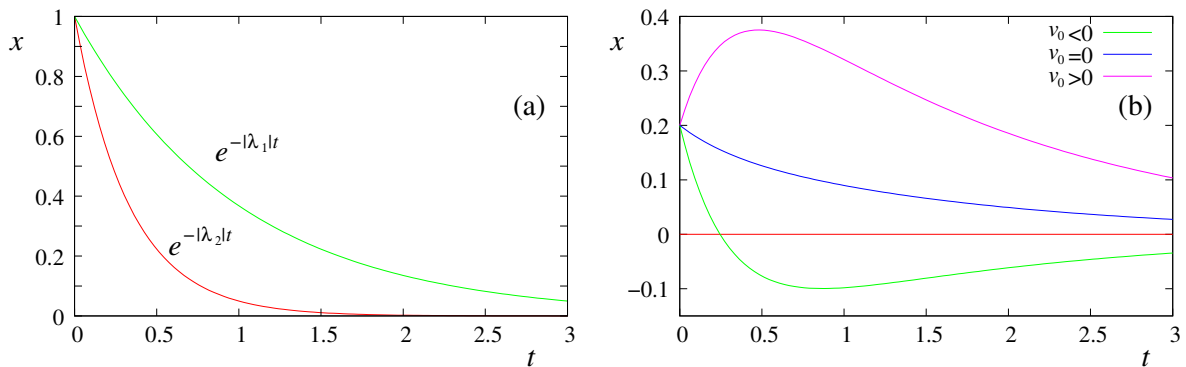
$$\lambda_1 = -|\lambda_1|, \quad \lambda_2 = -|\lambda_2| \quad (6.12)$$

Az $\{a_1, a_2\}$ együtthatókat az alábbi lineáris egyenletrendszerből tudjuk meghatározni:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= x_0 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 &= v_0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

A mozgást pedig a (6.11) általános megoldás adja meg.

A túlszillapított eset jellegzetes mozgásaira a 6.3 ábra mutat példákat.



6.3. ábra. (a) A két exponenciális részmegoldás, (b) egy-egy példa az $x(t)$ függvényre különböző kezdősebesség esetén.

6.2.2. Határcsillapítás

Ebben az esetben $\alpha = \omega_0$, azaz $k = \sqrt{4mD}$. Ekkor, mivel $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ ezért látszólag csak egy megoldása van a (6.4) egyenletnek. Ez azonban nem elegendő, hiszen két kezdeti feltételünk $\{x_0, a_0\}$ van. Azonban a $\alpha = \omega_0$, esetén az egyenletnek van egy másik speciális megoldása. Ezt keressük a

$$x(t) = te^{-\alpha t} \quad (6.14)$$

alakban. Ekkor ugyanis:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x \\ 0 &= -2\alpha e^{-\alpha t} + \alpha^2 t e^{-\alpha t} + 2\alpha (e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}) + \alpha^2 t e^{-\alpha t}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Tehát az általános megoldás határcsillapított esetben a következő:

$$x(t) = (a_1 + a_2 t) e^{-\alpha t} \quad (6.16)$$

Az $\{a_1, a_2\}$ együtthatókat az alábbi lineáris egyenletrendszerből tudjuk meghatározni:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_0 \\ a_1 \alpha + a_2 &= v_0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

6.2.3. Alulcsillapítás

Legyen most $\alpha < \omega_0$ azaz $k < \sqrt{4mD}$. Ebben az esetben a (6.10) egyenlet megoldásai komplexek:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_\alpha, \quad (6.18)$$

ahol $\omega_\alpha \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Az általános megoldás (6.11) azonban komplex is lehet, miközben az $x(t)$ elmozdulást a valós számok halmazán kell keresnünk. Ehhez az kell, hogy az $\{a_1, a_2\}$ együtthatók komplexek legyenek. Ha $x(t) \in \mathbb{R}$, akkor megegyezik a komplex konjugáltjával. Azaz

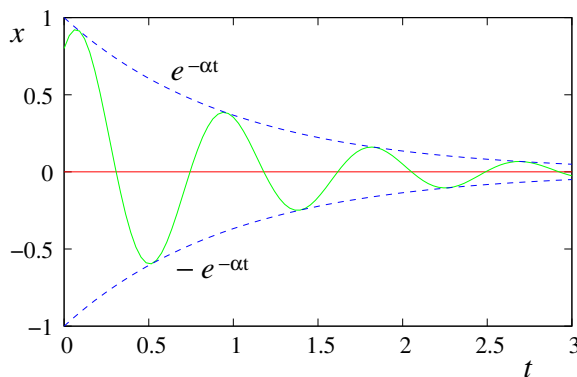
$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) \\ e^{-\alpha t} (a_1 e^{i\omega_\alpha t} + a_2 e^{-i\omega_\alpha t}) &= e^{-\alpha t} (a_1^* e^{-i\omega_\alpha t} + a_2^* e^{i\omega_\alpha t}) \\ e^{i\omega_\alpha t} \underbrace{(a_1 - a_2^*)}_{=0} &= e^{-i\omega_\alpha t} \underbrace{(a_1^* - a_2)}_{=0}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Tehát, ha $a_1^* = a_2$, akkor a megoldások valósak. Írjuk fel a_1 és a_2 együtthatókat a következő módon:

$$\begin{aligned} a_1 &= Ae^{i\phi} \\ a_2 &= Ae^{-i\phi}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

ahol A és ϕ valósak. A valós általános megoldás tehát a következő:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t} \underbrace{2A}_a \underbrace{\left[\frac{e^{i(\omega_\alpha t + \phi)} + e^{-i(\omega_\alpha t + \phi)}}{2} \right]}_{\cos(\omega_\alpha t + \phi)} \\ x(t) &= ae^{-\alpha t} \cos(\omega_\alpha t + \phi) \end{aligned} \quad (6.21)$$



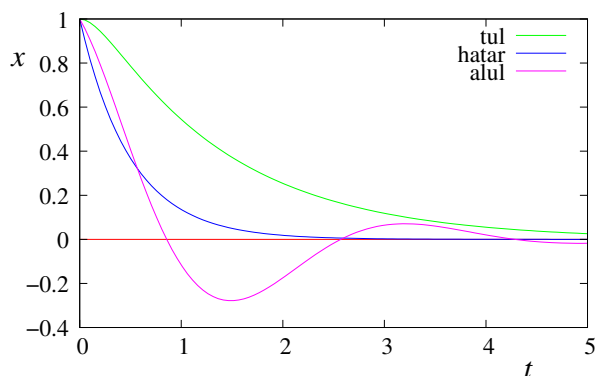
6.4. ábra. Az alulcsillapított rezgőmozgás és a burkoló exponenciális lecsengés.

A (6.21) általános megoldást az alábbi ekvivalens alakokba is lehet írni:

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{-\alpha t} \sin(\omega_\alpha t + \psi) \\ x(t) &= e^{-\alpha t} [c \sin(\omega_\alpha t) + d \cos(\omega_\alpha t)] \end{aligned} \quad (6.22)$$

A legutóbbi egyenlet illeszthető legkönnyebben a kezdeti feltételekkel: $d = x_0$, illetve $c = v_0$. A kapott megoldások valójában egy csillapodó rezgést adnak meg, amelynek ω_α körfrekvenciája kisebb, mint a csillapítatlan oszcillátor saját körfrekvenciája ω_0 . Egy példa látható a 6.4 ábrán.

6.2.4. Összefoglalás



6.5. ábra. A tömegpont helye az idő függvényében adott rugóállandó és változó csillapítás mellett álló helyzetből elengedve. A paraméterek értéke $\omega_0 = 2\frac{1}{s}$, $\alpha = 3, 2, 0.8\frac{1}{s}$ a túl- (zöld), határ- (kék), illetve alulcsillapított (lila) esetben.

Legfontosabb megjegyzés, hogy a tömegpont helyzete minden esetben exponenciálisan közelít a nyugalmi helyzethez. Azaz kijelenthetjük, hogy a csillapított harmonikus oszcillátor mindig véges időn belül nyugalomba kerül. (Ezt úgy kell érteni, hogy bármilyen kis ε távolságot veszünk az egyensúlyi helyzet körül, a tömegpont véges időn belül nem lép ki ebből a tartományból és ez akkor is így van, ha ε -t változtatva az időt is hatványfüggvény szerint átskálázzuk.)

Az előbbi fejezetekben a csillapítást három különböző részre bontottuk, mivel matematikailag más-más úton jutottunk el a megoldáshoz. Azonban ez a felbontás nem csak a levezetés miatt lényeges, hanem gyakorlati szempontból is. Vessünk egy pillantást a 6.5 ábrára! Itt összehasonlítjuk különböző csillapítás esetén egy adott m tömegű tömegpont helyének időfejlődését, ha kezdetben álló helyzetből véges kitérésből elengedjük. A rugóállandót mindhárom kísérletben ugyanannak választjuk.

Jól látható, hogy a határcsillapítás esetében éri el leggyorsabban a nyugalmi helyzetét a test. A túlcsillapítás nem engedi a testet kellően felgyorsulni, ezért a lecsengés lassú lesz. Alulcsillapítás esetén a test gyorsan áthalad az egyensúlyi helyzeten, de másik oldalt is kilengve tovább oszcillál. A kettő közötti optimum a határcsillapítás. A (6.10), (6.16), (6.21) egyenletekből jól látszik, hogy az exponenciális kitevője pont a határcsillapítás esetén a legkisebb.

Ennek fontos jelentősége van, ugyanis sok olyan gyakorlati probléma van, ahol fontos a rezgések mielőbbi csillapítása. Elég csak pl. az autók kerekeire gondolni, ahol a stabilitás és az úttartás miatt fontos a rezgések mielőbbi csillapítása. A fizika más területén is jól jön ez a tulajdonság. Molekuláris dinamikában [2], ahol ha számítógépen sok-sok részecske statikus helyzetét vizsgáljuk, a határcsillapítás segít az egyensúlyi helyzet mielőbbi elérésében.

6.2.5. Mechanikai energia

Nézzük meg a mechanikai energia megváltozását, a 3.3 fejezetben megismert módon! Induljunk ki a csillapított harmonikus oszcillátor mozgásegyenletéből (6.2):

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -Dx - k\dot{x} \quad | \cdot \dot{x} \\
 m\ddot{x}\dot{x} &= -Dx\dot{x} - k\dot{x}^2 \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2}Dx^2 \right) - k\dot{x}^2 \quad \Big| \int_{t_1}^{t_2} \dots dt \\
 \Delta E_{\text{mech}} &= \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} -k\dot{x}^2 dt = \int_{x_1}^{x_2} -k\dot{x} dx < 0 \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

Ez a jól ismert általánosított munkatétel, amely szerint a rendszer mechanikai energiája nem állandó, hanem a súrlódási erő munkája csökkenti, míg a rugóerő konzervatív.

Mivel az $\{x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0\}$ kezdeti feltételek esetén $E = 0$ így nincsen semmi, ami az energia disszipációt fedezné. Azaz ebben az esetben csak az $x(t) \equiv 0$ triviális megoldás jöhet szóba.

6.3. Gerjesztett csillapított oszcillátor

Az előző fejezetben láttuk, hogy a csillapított oszcillátor magára hagyva egy idő után megáll. A valóságban azonban egy ilyen rendszert folyamatosan érhetik erőhatások. Az ilyen rendszert gerjesztett csillapított oszcillátornak nevezzük (pl. az autó kereke, ahol a csillapítást a lengéscsillapító, a gerjesztést az út egyenetlenségei adják). Tehát feltételezzük, hogy a csillapított oszcillátorra egy időfüggő $F(t)$ erő is hat. Ekkor a (6.2) mozgásegyenlet a következőképpen módosul:

$$m\ddot{x} + Dx + k\dot{x} = F(t) \quad (6.24)$$

Tömeggel való osztás után kapjuk az alábbi *inhomogén* differenciálegyenletet:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (6.25)$$

ahol $f(t) = F(t)/m$, tehát $f(t)$ gyorsulás dimenziójú.

Ez egy lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, amelynek matematikai megoldási technikája közismert. Mivel az egyenlet lineáris, ezért az $x_{\text{IH}}(t)$ általános megoldás felírható az alábbi alakban:

$$x_{\text{IH}}(t) = x_{\text{H}}(t) + x_{\text{IHP}}(t) \quad (6.26)$$

ahol $x_{\text{H}}(t)$ a homogén egyenlet általános megoldása (eddig az előzőekben ezzel foglalkoztunk), a két paraméteres függvényosztály bármelyik eleme lehet és bármilyen kezdeti feltételre illeszthető. Az $x_{\text{IHP}}(t)$ az inhomogén egyenletnek egy tetszőleges induló értékkel $\{x_{\text{IHP}}(0), \dot{x}_{\text{IHP}}(0)\}$ rendelkező megoldása. Ez tehát egy konkrét megoldás, amely nem tartalmaz semmiféle ismeretlen paramétert. Neve *partikuláris* (részleges, nem teljes) megoldás.

Az előzőekben láttuk, hogy a homogén egyenlet megoldása gyorsan lecseng:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{H}}(t) = 0 \quad (6.27)$$

Ezért ezt a megoldást tranziens megoldásnak is nevezik. Elegendően hosszú időre tehát:

$$x_{\text{IH}}(t) \simeq x_{\text{IHP}}(t) \quad (6.28)$$

Tehát a rendszer hosszú időre elfelejti a kezdeti feltételeket, ezért az $x_{\text{IHP}}(t)$ -t *állandósult* megoldásnak nevezzük.

Toljuk ki a kezdeti időpontot a $t \rightarrow -\infty$ -be, és a teljes $(-\infty, \infty)$ időtartományon hasson $f(t)$, és keressük a $f(t)$ által generált $x_{\text{IHP}}(t) = x(t)$ függvényt.

6.4. Green-függvény

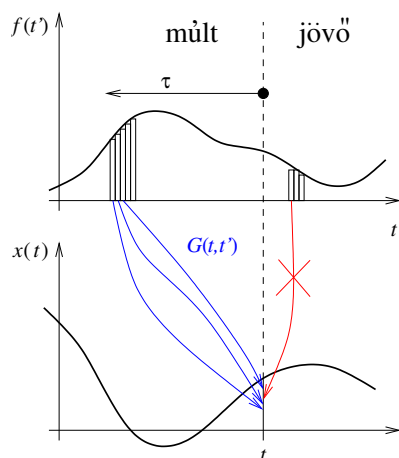
A 6.1 fejezetben definiáltuk a lineáris rendszereket: Ha $f_i(t)$ a bemenet és $x_i(t)$ a kimenet a lineáris rendszerből akkor a következő kapcsolatok igazak:

$$\begin{aligned} [f_1(t) + f_2(t)] &\rightarrow [x_1(t) + x_2(t)] \\ [af_1(t)] &\rightarrow [ax_1(t)] \end{aligned} \quad (6.29)$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott bemeneti függvény milyen kimeneti választ ad. Az egész folyamatot a 6.6 ábra szemlélteti. Általánosságban a fenti lineáris kapcsolatot a következő kifejezéssel lehet leírni:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') f(t') dt' \quad (6.30)$$

Ami szavakban azt fejezi ki, hogy az $x(t)$ válaszfüggvény értéke egy adott t pontban a gerjesztés összes pontban vett hatásának valamilyen súlyozott összege. A súlyozási függvényt *Green-függvénynek* nevezzük.



6.6. ábra. A Green-függvény szemléltetése. A múltbeli gerjesztések (kék) hatással vannak a válasz t időpontbeli értékére, míg a jövőbeliek (piros) nem. A kis téglalapok határesetek az integrál. A gerjesztések idejét mérhetjük labor időben t' , vagy eltelt időben τ , ha a rendszer időben változatlan.

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszer nem változik az időben (ezt fejezi ki, hogy (6.4) egyenlet *állandó együtthatójú*). Ekkor a rendszer állapota csak az időkülönbségtől függ, hiszen bármikor végezzük el a kísérletet ugyanazt az eredményt kell kapnunk:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') f(t') dt' \quad (6.31)$$

Alapvető fizikai megfigyelés a kauzalitás, azaz az ok-okozati viszony. Ez azt jelenti, hogy $t' > t$ gerjesztések nincsenek hatással az $x(t)$ értékére. A gerjesztés válasz kapcsolat tovább egyszerűsödik:

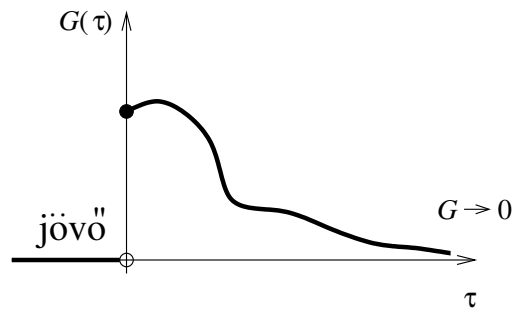
$$x(t) = \int_{-\infty}^t G(t - t') f(t') dt' \quad (6.32)$$

Vezessünk be egy változó cserét, amelyben a t' *mikor* időváltozót a visszanező, *mennyivel ezelőtt* $\tau \equiv t - t'$ változóval helyettesítjük. Ekkor (6.32) egyenlet az alábbiak szerint módosul:

$$x(t) = \int_0^{\infty} G(\tau) f(t - \tau) d\tau. \quad (6.33)$$

Vegyük észre, hogy $G(\tau)$ idődimenziójú, azaz $[G] = s$.

Ha megköveteljük, hogy $G(\tau) = 0$ $\tau < 0$ esetén, akkor a kauzalitást így is írhatjuk



6.7. ábra. Szemléltető példa Green-függvényhez. $\tau < 0$ -ra a függvény értéke 0, azonban nagy τ értékekre is 0-hoz tart a függvény értéke.

(lásd 6.7.:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

$$G(\tau) = 0, \quad \text{ha } \tau < 0 \quad (6.34)$$

Fontos észrevétel, hogy

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = 0. \quad (6.35)$$

Ez azt jelenti, hogy a nagyon régi események nincsenek hatással a mostani válaszra. Ez disszipatív lineáris rendszerekre mindig igaz.

A (6.34) egyenlet tulajdonképpen két függvényt szoroz össze egy speciális utasítással. Neve *konvolúció* [3].

A (6.34) egyenlet azért is fontos, mert ha meghatározható $G(\tau)$ alakja, akkor utána tetszőleges gerjesztéshez kiszámítható a válasz. Az lenne a legjobb, ha találnánk egy bemeneti $f(t)$ függvényt amire a rendszer a Green-függvénnyel arányos választ adna. Ha visszalapozunk a (1.20) egyenlethez jól látható, hogy van ilyen bemenet, mégpedig a Dirac-deltával arányos $f(t) = v_0 \delta(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \underbrace{f(t - \tau)}_{v_0 \delta(t - \tau)} d\tau = v_0 G(t) \quad (6.36)$$

Megjegyezzük, hogy a Dirac-delta teljesíti a $\delta(\tau) = 0$, ha $\tau < 0$ feltételt. A v_0 fizikai jelentését lásd alább.

Tehát a Green-függvény a lineáris rendszer Dirac-deltára adott válasza.

Megjegyezzük, hogy sok helyütt használatos a Green-függvény helyett a $H(t)$ átmeneti függvény, amely a $\theta(t)$ lépcsőfüggvényre adott válasz. A levezetés teljesen analóg módon megy.

6.4.1. Csillapított oszcillátor Green-függvénye

Határozzuk meg a gerjesztett csillapított lineáris oszcillátor Green-függvényét! Amint fent meghatároztuk, a Green-függvény, a rendszer Dirac-deltára adott válasza. Helyettesítsük a (6.25) egyenletbe $x = v_0 G$, illetve $f = v_0 \delta(t)$ kifejezéseket! v_0 -al való egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\ddot{G} + 2\alpha\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t) \quad (6.37)$$

Fontos megjegyezni, hogy míg x dimenziója méter ($[x] = \text{m}$), addig a Green-függvényé másodperc ($[G] = \text{s}$). A kettő közötti különbség egy sebesség dimenzió. Olyan, mintha (6.37) egyenletet elosztottuk volna egy konstans v_0 sebességgel. Ha ezt figyelembe vesszük akkor az egyenlet jobb oldala a következő:

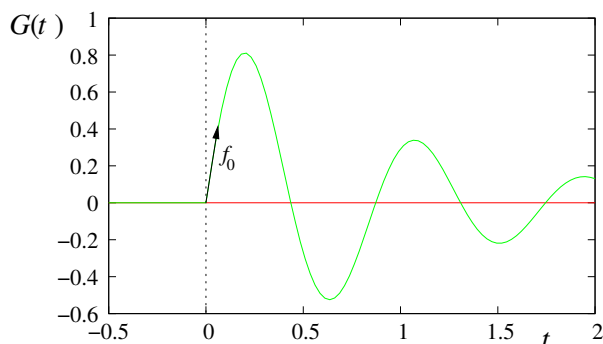
$$F(t) = m f(t) = m v_0 \delta(t) \quad (6.38)$$

Azaz 1.3 fejezetben megtanultak alapján ez olyan mint egy pillanatszerű erőlöketés. Ez látható a (6.37) egyenlet idő szerinti integráljából a $[-\varepsilon, \varepsilon]$ intervallumon:

$$[\dot{x}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (2\alpha\dot{x} + Dx) dt}_{=\mathcal{O}(\varepsilon)} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} v_0 \delta(t) dt = v_0, \quad (6.39)$$

ahol a középső integrál ε nagyságrendű, mivel hagyományos függvényekből áll. Tehát a sebességváltozás a $t = 0$ időpillanatban v_0 nagyságú lesz:

$$\begin{aligned} x(0_-) &= 0 & x(0_+) &= 0 \\ \dot{x}(0_-) &= 0 & \dot{x}(0_+) &= v_0 \end{aligned} \quad (6.40)$$



6.8. ábra. Alulcsillapított harmonikus oszcillátor Green-függvénye.

Mivel $t > 0$ esetén a Dirac-delta zérus, ezért visszkapjuk a gerjesztés mentes harmonikus oszcillátort a (6.40) kezdeti feltételekkel (6.8 ábra). Ennek viszont már ismerjük a megoldását.

Válasszuk $v_0 = 1\text{m/s}$ értéket és alulcsillapított esetet, ekkor az általános megoldás (6.21):

$$x(t) = a \sin(\omega_\alpha t + \phi) e^{-\alpha t} \quad (6.41)$$

A (6.40) kezdeti feltételekből meghatározható a és ϕ . A kapott Green-függvény tehát a következő:

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_\alpha} \sin(\omega_\alpha t) e^{-\alpha t} & \text{ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{ha } t < 0 \end{cases} \quad (6.42)$$

6.4.2. Fourier-transzformáció lineáris rendszerekre

A lineáris rendszer válaszfüggvényét a bemenet és a Green-függvény konvolúciójával állíthatjuk elő (6.34):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) f(t - \tau) d\tau. \quad (6.43)$$

Az (1.52) egyenlet alapján Fourier térben a konvolúció egy egyszerű szorzássá válik:

$$\tilde{X}(\omega) = 2\pi \tilde{G}(\omega) \tilde{F}(\omega), \quad (6.44)$$

ahol $\tilde{G}(\omega) = \mathcal{F}[G(t)]$ a Green-függvény Fourier transzformáltja, az *átviteli függvény*.

Határozzuk meg a csillapított oszcillátor átviteli függvényét! Tudjuk, hogy $\mathcal{F}[\dot{x}] = i\omega \tilde{X}(\omega)$, illetve $\mathcal{F}[\ddot{x}] = -\omega^2 \tilde{X}(\omega)$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x &= f(t) \\ -\omega^2 \tilde{X}(\omega) + i\omega \tilde{X}(\omega) + \omega_0^2 \tilde{X}(\omega) &= \tilde{F}(\omega) \\ \tilde{X}(\omega) (-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2) &= \tilde{F}(\omega) \end{aligned} \quad (6.45)$$

Fourier térben a differenciálegyenlet nagyon egyszerű alakú. A $\tilde{F}(\omega)$ bemenethez a $\tilde{X}(\omega)$ kimenetet egyszerű osztással kapjuk:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2} = 2\pi \tilde{G}(\omega) \tilde{F}(\omega) \quad (6.46)$$

Tehát a csillapított oszcillátor átviteli függvénye:

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2)}. \quad (6.47)$$

Ellenőrizhető, hogy a fenti függvény a (6.42) Green-függvény Fourier-transzformáltja.

Az átmeneti függvény további vizsgálatához írjuk át az átviteli-függvényt Euler-alakba [4]:

$$\tilde{G}(\omega) = \left| \tilde{G}(\omega) \right| e^{-i\gamma} \quad (6.48)$$

Mivel

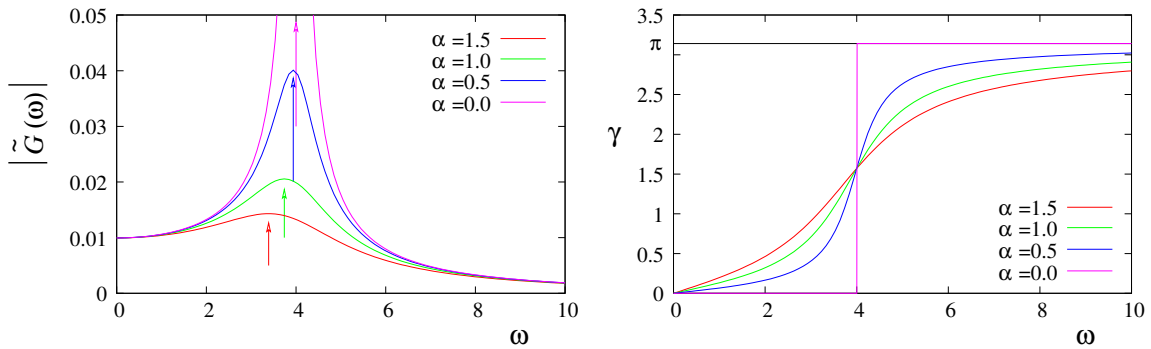
$$2\pi\tilde{G}(\omega) = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (6.49)$$

ezért

$$\tan \gamma = -\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (6.50)$$

$$\left| \tilde{G}(\omega) \right| = \frac{1}{2\pi\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \quad (6.51)$$

A $\left| \tilde{G}(\omega) \right|$ függvényt *rezonancia görbének* nevezzük.



6.9. ábra. A csillapított oszcillátor rezonancia görbéje (a) és fázistolása (b), $\omega_0 = 4$ paraméter esetén különböző α értékekre. A rezonanciagörbe maximumát az (a) ábrán nyíl jelöli.

Vizsgáljuk meg a kapott eredményeket! A 6.9 ábrán egy példán szemléltetjük az átviteli függvény és a fázistolás alakját. Jól láthatóan a rezonancia görbének van egy maximuma (bár bizonyos α értékekre ez megszűnik). Ennek pozíciója számolható, ezt nevezzük a rezonancia frekvenciának. Értéke

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \quad (6.52)$$

A rezonancia frekvenciának a mérnöki alkalmazásokban kulcsszerepe van. Szinte minden építmény (épület, járművek, stb.) esetében fontos követelmény a rezonanciák elkerülése, vagy biztosítása. Rezonancia esetében ugyanis a rezgések amplitúdója megnő. Bizonyos esetekben (pl. autó) ez csak nemkívánatos zajokban jelenik meg, azonban más

esetekben a túl nagy amplitúdójú oszcilláció a szerkezet károsodásához vezethet. Egyik jól ismert példa a Tacoma-híd katasztrófája [5]. Manapság alapkövetelmény, hogy a szerkezetre ható rezgések (szél, földrengés) tipikus tartományában az épített struktúra jól csillapítson és ebben a tartományban rezonanciafrekvenciák ne forduljanak elő.

7. fejezet

Merev testek dinamikája

7.1. Merev test fogalma

A pontrendszerek általános tárgyalása után speciális rendszerekkel fogunk foglalkozni. A minket körülvevő világban (makroszkopikus mérettartományban) sokféle pontrendszerrel találkozunk. Az első tapasztalati benyomás, amely alapján ezek elkülönülnek egymástól az a halmazállapotuk. Azaz beszélünk szilárd, folyékony és légnemű halmazállapotú anyagokról. Természetesen, a részletek tanulmányozása egy sokkal gazdagabb világot tár fel előttünk, de az első lépésként halmazállapot szerinti osztályzás összhangban van a mindennapi tapasztalatainkkal.

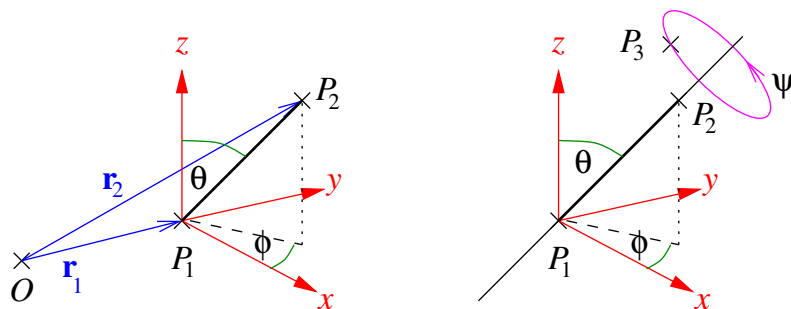
Általában minden anyag deformálható, ezzel foglalkozik a Deformálható testek dinamikája 8 fejezet. A szilárd testeknek nem csak a deformációja, hanem a merev testként való mozgása is érdekes problémákra vezet. Ezzel a kérdéssel foglalkozik ez a fejezet.

Merev testnek nevezzük azt a pontrendszert, amelyben bármelyik két pont egymástól mért távolsága időben állandó, azaz $\forall i, j$ -re:

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = |\mathbf{r}_{ij}| = r_{ij} = \text{állandó.} \quad (7.1)$$

Tehát a tömegpontok koordinátái nem függetlenek egymástól, rájuk a fenti előírásoknak teljesülnie kell. Ezeket kényszerfeltételeknek nevezzük. Elemi megfontolásokkal kiszámíthatjuk, hogy hány skalár adat kell egy merev test helyzetének a megadásához:

- A test egy P_1 pontját mozgathatom bárhová a térben ez három szabadsági fok (x_1, y_1, z_1) .
- A test egy másik P_2 pontját már csak egy gömbfelületre helyezhetem, hiszen a $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ távolság állandó kell, hogy legyen. A gömbfelületet két szöggel (ϑ, ϕ) tudjuk paraméterezni (lásd 7.1 ábra).
- Ha P_1 és P_2 rögzített, akkor ez a két pont által meghatározott egyenes tengely körül még a test elforoghat. Ezt egy ψ szöggel tudjuk paraméterezni (lásd 7.1 ábra).



7.1. ábra. Merev test elforgatásának paraméterezése Euler-szögekkel.

A merev test helyzetét tehát 6 db paraméterrel tudjuk leírni: $(x, y, z, \vartheta, \phi, \psi)$. Az (x, y, z) a test térbeli elmozdulását jellemzi, a (ϑ, ϕ, ψ) Euler-szögek [6] a test elfordulását.

A következőkben a merev test mozgását mindig egy állónak tekintett vonatkoztatási rendszerhez (inerciarendszerhez) viszonyítva vizsgáljuk. Ha rögzítjük a merev test egy pontját, akkor a test csak ezen pont körül mozoghat. A P_1 pont helye három (x_1, y_1, z_1) Descartes koordinátával jelölhető ki. Ekkor (ϑ, ϕ, ψ) szabadon változhat. Ezt nevezzük a merev test *rögzített pont körüli mozgásának*, vagy *pörgettyűmozgásnak*.

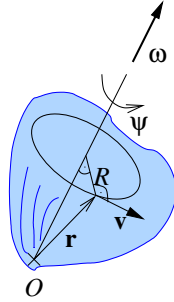
Ha rögzítjük a merev test egy másik P_2 pontját is, akkor a merev test csak a $\overline{P_1P_2}$ egyenes által meghatározott tengely körül foroghat. A tengely helyzetét (az álló koordinátarendszerhez képest) a gömbi koordinátáknál használatos (ϑ, ϕ) szögek adják meg. A test tengely körüli elfordulását pedig a ψ szögparaméter. Ezt nevezzük *rögzített tengely körüli forgásnak*.

A pörgettyűmozgás tanulmányozása a merev testek dinamikájának egyik legbonyolultabb és egyben legérdekesebb területe. Az érdekessége abban van, hogy egy pörgettyű a külső erőhatásokra nem az általunk szubjektíven várt módon reagál. Ennek oka tisztán pszichológiai, ugyanis a hétköznapjaink során a minket körülvevő, emberléptékű, természetes környezetünkben kevés számú pörgettyűvel találkozunk. Így nem alakulhatott ki ezen mozgást illetően semmiféle szemléletünk. Ezért a pörgettyű reakcióját a nem forgó testeknél nyert tapasztalataink alapján képzeljük el. A csalódásunk szembeszökő lesz. Mindezekről a Kísérleti Fizika során már némi benyomást szerezhettünk. A merev test mozgásának a részletesebb tanulmányozását a legegyszerűbbel, a rögzített tengely körüli forgással kezdjük. Majd ezután rátérünk a sokkal bonyolultabb pörgettyűmozgásra.

7.2. Rögzített tengely körüli forgás

Az általánosság elvesztése nélkül feltesszük, hogy a rögzített tengely átmegy az origón (lásd 7.2 ábra).

A merev test leírható igen sűrű tömegpontok sokaságaként, akár tömegpontként jel-



7.2. ábra. Merev test forgása rögzített tengely körül.

lemezve minden egyes atomot, azonban sokkal célszerűbb *kontinuum anyagmodell*t használni. Azaz a merev test anyagát egy $\rho(\mathbf{r})$ sűrűségű folytonos közegnek fogjuk tekinteni. Ekkor

$$dm = \rho(\mathbf{r})d^3r, \quad (7.2)$$

ahol dm az \mathbf{r} hely körüli d^3r térfogatban lévő anyag tömegét jelenti. A pontrendszereknél használt összegzés helyett az integrálásra térünk át

$$\sum_{i=1}^N \dots \longrightarrow \int \dots d^3r = \int \dots dm. \quad (7.3)$$

Az integrálást a testre végezzük, de ha a sűrűséget úgy definiáljuk, hogy a testen kívül zérus, akkor az egész térre is felírható az integrál.

A rögzített tengely körül forgó merev test minden pontja körmozgást végez ezért érdemes az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektort használni. Ahol az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektor iránya párhuzamos a forgástengellyel, nagysága pedig a szögelfordulás sebességével $|\boldsymbol{\omega}| = \dot{\psi}$.

A test minden pontjának sebessége a körpálya érintőjének irányába mutat nagysága, pedig $v = R\dot{\psi}$, ahol R a tömegpont körpályájának sugara. a sebesség vektor alakban

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (7.4)$$

7.2.1. Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete

Írjuk fel a merev test perdületét (3.31) egyenlet alapján rögzített origó mellett:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3r = \\ &= \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3r \end{aligned} \quad (7.5)$$

Mivel mind a vektoriális szorzás, mind az integrálás lineáris művelet, ezért a perdület lineáris függvénye a szögsebesség vektornak. A (7.5) egyenlet tehát egy lineáris kapcsolatot ír fel két vektor, \mathbf{L}_0 és $\boldsymbol{\omega}$ között. Két vektor között az általános lineáris kapcsolatot egy tenzorral, a tehetetlenségi nyomaték tenzorral írhatjuk fel:

$$\mathbf{L}_0 = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega}. \quad (7.6)$$

Számoljuk ki a $\boldsymbol{\theta}$ tenzort a (7.5) egyenlet alapján, kihasználva, hogy $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \equiv (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$:

$$\mathbf{L}_0 = \int \underbrace{\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\boldsymbol{\omega}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})} \rho(\mathbf{r}) d^3r = \int [\boldsymbol{\omega}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})] \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (7.7)$$

Írjuk át $\boldsymbol{\omega}$ -ra ható tenzor alakba az $\mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})$ kifejezést:

$$[\mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})]_i = \sum_j r_i r_j \omega_j = \sum_j (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})_{ij} \omega_j \quad (7.8)$$

Itt kihasználtuk (1.7) egyenletben definiált diadikus szorzatot. Tehát

$$\mathbf{L}_0 = \int (\mathbf{1}r^2 - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} \rho(\mathbf{r}) d^3r = \underbrace{\left[\int (\mathbf{1}r^2 - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3r \right]}_{\boldsymbol{\theta}_0} \boldsymbol{\omega} \quad (7.9)$$

Azaz

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \int (\mathbf{1}r^2 - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d^3r. \quad (7.10)$$

Jól látható tehát, hogy a tehetetlenségi nyomatéktenzor csak a test geometriájától függ. Vizsgáljuk meg $\boldsymbol{\theta}$ komponenseit:

$$\theta_{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \rho(\mathbf{r}) d^3r, \quad (7.11)$$

ahol δ_{ij} a Kronecker-delta (1.5). A tehetetlenségi tenzor tehát egy szimmetrikus mátrix. Mátrix alakban ez a következőképpen néz ki:

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \int \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (7.12)$$

A mellékátlóban lévő θ_{ij} , $i \neq j$ mátrixelemek neve deviációs nyomatékok. Az elnevezés eredete forgó merev test dinamikájában keresendő. Erre még visszatérünk. Összegezve, a tehetetlenségi tenzor csak a test geometriájától függ és szimmetrikus.

7.2.2. Rögzített tengely körül forgó merev test kinetikus energiája

Mint azt láttuk, ha egy merev test egy rögzített t tengely körül forog, akkor minden pontja körmozgást végez, vagy áll, ha a pont éppen a forgástengelyen van. Minden pontjának a szögsebessége ugyanaz az $\boldsymbol{\omega}$. A tömegpontok sebessége a már megismert módon (7.5) alakba írható. Ez csak akkor igaz, ha az helyvektorokat a forgástengelyen, de azon tetszőleges helyen lévő pontból mérjük, azaz az origó a forgástengelyen van. Így egy elemi tömegpont kinetikus energiája:

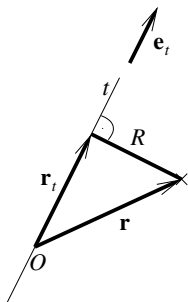
$$dE_k = \frac{1}{2}v^2 dm = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 dm \quad (7.13)$$

Használjuk a a Levi-Civita-szimbólum (1.4) ciklikusságát:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \mathbf{v}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega}[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \quad (7.14)$$

Most megint a (7.5) egyenlethez hasonló kifejezést kapunk:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int \{\boldsymbol{\omega}[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\} \rho(\mathbf{r}) d^3r = \\ &= \frac{1}{2} \int \{\boldsymbol{\omega}[\mathbf{1}r^2 - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}]\} \rho(\mathbf{r}) d^3r = \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\theta}_0 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i \theta_{ij} \omega_j \end{aligned} \quad (7.15)$$



7.3. ábra. A tengelyen lévő origóból induló helyvektor, annak tengelyre vett vetülete és a tengelytől vett távolság szemléltetése.

Bontsuk szét az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektort tengely irányú egységvektorra \mathbf{e}_t és szögsebesség nagyságra: $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$. Ezt felhasználva írjuk fel ismét a kinetikus energiát:

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{(\mathbf{e}_t \boldsymbol{\theta}_0 \mathbf{e}_t)}_{\theta_t} = \frac{1}{2} \theta_t \omega^2, \quad (7.16)$$

ahol θ_t a t tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték. A (7.16) egyenlet a középiskolából jól ismert kifejezés, ahol egy tengelyre vetített tehetetlenségi nyomaték egy konstans. Belátható, hogy θ_t a korábban megismert módon a sűrűség tengelytől vett távolságának négyzetének integráljával számolható. Induljunk ki a tehetetlenség tenzor definíciójából (7.10) és használjuk ki, hogy a sugár merőleges a tengelyre (lásd 7.3) ábrát:

$$\begin{aligned}\theta_t &= \int \mathbf{e}_t [r^2 \mathbf{e}_t - \mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{e}_t)] \rho(\mathbf{r}) d^3r = \int [r^2 - (\mathbf{r}\mathbf{e}_t)^2] \rho d^3r = \int [r^2 - r_t^2] \rho d^3r \\ \theta_t &= \int R^2 \rho d^3r,\end{aligned}\tag{7.17}$$

ahol R a tengelytől vett távolságot jelöli. A fenti kifejezés nyilvánvalóan változatlan marad, ha az origót a tengely mentén eltoljuk. Ezt a tényt el is vártuk, mivel a kinetikus energia nagysága nem függhet a koordináta-rendszer origójának helyzetétől.

7.2.3. Rögzített tengelyre ható erők

Vizsgáljuk meg, hogy milyen esetben hat erő a rögzített tengelyű forgás során a tengelyre! A mindennapi életben ezek igen fontos jelentőséggel bírnak.

Ha a tömegközépponton nem halad át a tengely, akkor a tömegközépponti tétel 4.1 alapján erőhatás szükséges a tömegközéppont és ezáltal a test körpályán tartásához:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{tkp}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{tkp}}\tag{7.18}$$

A körpályán tartáshoz szükséges erő (2.5):

$$\mathbf{F}^k = M\ddot{\mathbf{r}}_{\text{tkp}} = M\mathbf{a}_{\text{cp}} = -\frac{M(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{tkp}})^2}{r_{\text{tkp}}}\tag{7.19}$$

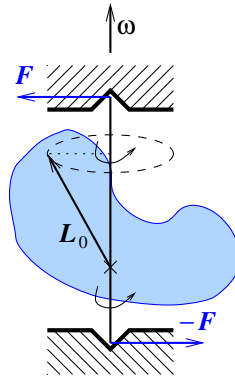
Jól látható, hogy amennyiben \mathbf{r}_{tkp} párhuzamos a tengellyel, azaz a $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektorral, akkor a külső erők eredője zérus. Ez akkor valósul meg, ha a tömegközéppont a forgástengelyen van.

Ezt az erőhatást jól lehet látni a mosógép centrifugálásakor, mivel a ruha sokszor egyenetlenül oszlik el a dobban, ezért a forgó rész tömegközéppontja ritkán esik egybe a forgástengellyel, ami a mosógép rázkódásához, ugrálásához vezet. Ez az effektus máshol is zavaró lehet, például az autó kerekét is azért kell centríroztatni, hogy az ugrálást, ezáltal a tapadás csökkenését elkerüljük.

Az, hogy a külső erők eredője zérus, még nem elegendő feltétel arra, hogy a tengely külső erőhatás nélkül is nyugalomban maradjon. Az

$$\mathbf{L}_0 = \boldsymbol{\theta}_0 \boldsymbol{\omega}\tag{7.20}$$

egyenletben a $\boldsymbol{\theta}_0$ tenzor a test geometriájától függ, tehát csak a testtel együtt forogva állandó. Álló koordináta-rendszerből szemlélve, amennyiben a test elfordul, akkor vele



7.4. ábra. Egy test perdületének forgása és az ébredő forgatónyomatékok, rögzített tengely esetén.

fordul θ_0 is. Ez azonban azt jelenti, hogy az álló rendszerből szemlélve az \mathbf{L}_0 perdületvektor a merev testtel együtt forog (7.4 ábra), azaz nem állandó. A pontrendszereknél tanult perdülettel értelmében

$$\dot{\mathbf{L}}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_0 = \mathbf{N}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (7.21)$$

Tehát ha \mathbf{L}_0 nem párhuzamos a $\boldsymbol{\omega}$ forgástengellyel, akkor a tengely egyhelyben tartásához forgatónyomatékokra van szükségünk. A tengely végén ébredő erők pedig az \mathbf{L}_0 és a tengely által meghatározott síkban lesznek. A forgatónyomaték létéről mindenki maga is meggyőződhet, nem kell hozzá más, csak egy krumpli és egy kötőtű.

7.3. Szabad tengely körül forgó merev test

7.3.1. Főtengely rendszer

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a testre nem hat külső forgatónyomaték. Ekkor $0 = \mathbf{N}_0 = \dot{\mathbf{L}}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$. Azaz a test perdülete nem változik. Ha $\boldsymbol{\omega}$ és \mathbf{L}_0 nem párhuzamosak, akkor mivel θ_0 a testtel együtt forog, ez csak úgy lehetséges, ha a pillanatnyi forgástengely is pillanatról pillanatra változik, azaz $\boldsymbol{\omega}(t)$. Azonban, ha $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{L}_0$, akkor ezek párhuzamosak is maradnak. Nézzük meg mikor lehetséges ez!

$$\mathbf{L}_0 = \boldsymbol{\theta}_0 \boldsymbol{\omega} = \theta_0 \boldsymbol{\omega}, \quad (7.22)$$

A (7.22) egyenlet egy sajátérték-egyenlet, ahol θ_0 sajátértéke, $\boldsymbol{\omega}$ pedig sajátvektora a $\boldsymbol{\theta}_0$ tehetetlenségi tenzornak.

Mivel a tehetetlenségi tenzor szimmetrikus ezért sajátértékei $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ valósak, sajátvektorai $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ pedig merőlegesek egymásra:

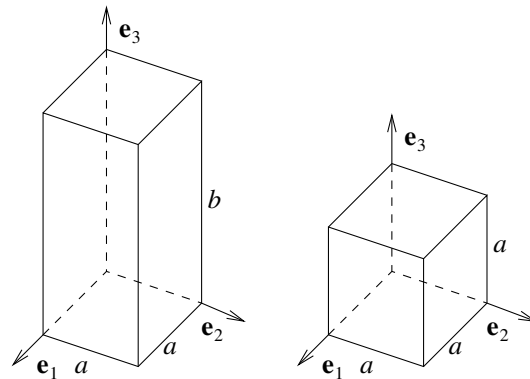
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}\mathbf{e}_1 &= \theta_1\mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{\theta}\mathbf{e}_2 &= \theta_2\mathbf{e}_2 \\ \boldsymbol{\theta}\mathbf{e}_3 &= \theta_3\mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{7.23}$$

A három merőleges sajátvektor egy bázist alkot, amelyben a fentiek alapján a tehetetlenségi tenzor diagonális:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}\tag{7.24}$$

A $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tengelyeket *tehetetlenségi főtengeleknek*, a koordinátarendszert *főtengelerendszernek (FTR)* nevezzük. Ekkor megkülönböztetés végett általában az x, y, z helyett a főtengeleket 1, 2, 3-mal jelöljük.

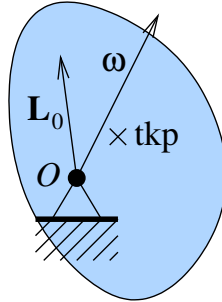
Az elmondottakból következik, hogy ha a merev testet egy tömegközéppontján (TKP) átmenő főtengele körül forgatjuk, akkor a tengelyre semmiféle külső erő nem fog hatni. Az ilyen tengelyeket *szabad tengelynek* nevezzük. A megadott feltételek miatt minden merev testnek (bármilyen alakú és tömegeloszlású is legyen) minimum három szabad tengelye van. Ezek a *tömegközépponti tehetetlenségi főtengelek*.



7.5. ábra. Négyzet alapú hasáb és kocka.

Általában a szabálytalan testeknek három szabad tengelye van. Azonban ha a test rendelkezik bizonyos szimmetriával, akkor akár végtelen sok szabad tengelye is lehet. Például a négyzet alapú hasábnak (7.5 ábra) két azonos tehetetlenségi nyomaték sajátértéke lesz $\theta_1 = \theta_2$, ilyenkor bármely $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$ tengely szabad tengely. A kocka esetében (7.5 ábra) mindhárom sajátérték azonos ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$), ekkor bármely tömegközépponton átmenő tengely szabad tengely. Tehát a kocka tehetetlensége azonos a gömbével, azaz a gömb és a kocka forgómozgásában semmilyen különbség sincs.

7.4. Rögzített pont körül forgó merev test dinamikája (a pörgettyű mozgás)



7.6. ábra. Rögzített pont körül forgó merev test illusztrációja.

Tekintsünk egy merev testet, amelyik egy adott (rögzített) O pontja körül szabadon foroghat. Ha az O nem esik egybe a tömegközépponttal és a test gravitációs térben van, akkor ún. súlyos pörgettyűről beszélünk.

Mint már említettük, ha $\boldsymbol{\omega}$ és \mathbf{L}_0 nem párhuzamos, akkor $\boldsymbol{\omega}(t)$ időben változik. Arra vagyunk kíváncsiak, hogyan mozog a merev testünk, azaz szeretnénk meghatározni az $\boldsymbol{\omega}(t)$ függvényt. A perdület megváltozása a forgatónyomatékkal egyezik meg:

$$\mathbf{N}_0 = \dot{\mathbf{L}}_0 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega}) = \dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (7.25)$$

A következő kérdés, hogy meg tudjuk-e határozni a tehetetlenségi tenzor megváltozását a forgás során? Vizsgáljuk meg a rendszert a testtel együttmozgó koordinátarendszerben! Ebben a rendszerben jelöljük vesszővel a mennyiségeket! A fenti (7.25) egyenlet a következőképpen néz ki az együttforgó rendszerben:

$$\dot{\mathbf{L}}'_0 = \boldsymbol{\theta}'\dot{\boldsymbol{\omega}}', \quad (7.26)$$

mivel $\dot{\boldsymbol{\theta}}' \equiv 0$, hiszen az csak a test geometriájától függ az együttmozgó rendszerben az nem változik. A labor rendszerből úgy kapjuk meg az együttmozgó rendszert, hogy mindig $\boldsymbol{\omega}$ -val forgunk. Azaz

$$\mathbf{N}_0 = \dot{\mathbf{L}}_0 = \dot{\mathbf{L}}'_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}'_0 \quad (7.27)$$

Megjegyezzük, hogy ezt egyszer már kommentár nélkül kihasználtuk a (7.21) egyenletben. A (7.25) egyenlet főtengeley-rendszerben tehát a következőképpen írható (most már elhagyjuk a vesszőket):

$$\mathbf{N}_0 = \boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} \quad (7.28)$$

Komponensenként kiírva:

$$\begin{aligned} N_{01} &= \theta_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 \theta_3 - \omega_3 \omega_2 \theta_2 \\ N_{02} &= \theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 \theta_1 - \omega_3 \omega_1 \theta_3 \\ N_{03} &= \theta_3 \dot{\omega}_3 + \omega_2 \omega_1 \theta_2 - \omega_1 \omega_2 \theta_1 \end{aligned} \quad (7.29)$$

Összevonva:

$$\begin{aligned} N_{01} &= \theta_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (\theta_2 - \theta_3) \\ N_{02} &= \theta_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (\theta_3 - \theta_1) \\ N_{03} &= \theta_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (7.30)$$

A (7.28), illetve (7.30) elsőrendű, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert a *pörgettyűmozgás Euler-egyenletének* nevezzük.

Az egyenletrendszer nemlineáris, ezért a megoldása néhány, jellegzetes, speciális eset-től eltekintve egyáltalán nem egyszerű. Látható, hogy az egyenletrendszer kapcsolatot teremt a rögzített O pont körül forgó test $\boldsymbol{\omega}$ szögsebessége és a rá ható külső erőknek az O pontra vett \mathbf{N}_0 nyomatéka között. Az érdekessége az, hogy ezt a kapcsolatot a forgó test-hez rögzített főtengeley-rendszerben felírható $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ és (N_{01}, N_{02}, N_{03}) komponensek között adja meg.

A pörgettyűmozgás megoldásának a másik nehézsége abban van, hogy ha már meghatároztuk $\boldsymbol{\omega}$ komponenseit, akkor még ebből ki kell találnunk, hogy a test hogyan mozog az álló rendszerben. Itt lép a színre az Euler-szögek rendszere. A bevezetőben láttuk ugyanis, hogy egy merev test mozgását a $(\vartheta(t), \phi(t), \psi(t))$ időfüggvényekkel adjuk meg. Ez azt jelenti tehát, hogy az ismeretében meg kell határoznunk az álló rendszerben rögzített koordinátarendszerünkben a szögsebesség-komponenseket, majd ennek alapján magát a mozgást, azaz

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \longrightarrow (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \longrightarrow (\vartheta(t), \phi(t), \psi(t)) \quad (7.31)$$

Mindez általános esetben egyáltalában nem könnyű feladat, de elvileg megoldható. Ebben rejlik a pörgettyűk dinamikájának a titokzatossága, de egyben a szépsége is.

Az alábbiakban két egyszerű esetben megoldjuk a pörgettyűmozgás Euler-egyenletét.

7.1. Feladat *Vizsgáljuk meg egy szabadon forgó test stabilitását! Biztosan mindenki észrevette már, hogy egy gyufaskatulyát pörögve feldobva annak mozgása néha szép pörgő marad, néha pedig bukdácsoló. Tudjuk, hogy elméletileg a szabad tengelyek mentén megpörgetve a szögsebesség állandó marad, tehát mindenképpen szép pörgő mozgást kellene látnunk. Ha a legkisebb és legnagyobb lapon megy át a tengelyünk, ez így is van, azonban ha a középsőn, akkor mindig bukdácsol. Nézzük meg miért van ez! Az itt ismertett levezetés a [7] jegyzet alapján készült.*

Legyen egy test tehetetlenségi tenzorának három sajátértékére igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 \quad (7.32)$$

Pörgessük meg a testet e legkisebb sajátértékhez tartozó \mathbf{e}_1 fő tengely mentén ω_1 szögsebességgel! Azonban mivel nem vagyunk tökéletesek, a másik két fő tengely mentén is kicsit forog a testünk (perturbáció), azaz a test szögsebessége:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2 + \mu \mathbf{e}_3, \quad (7.33)$$

ahol $\lambda, \mu \ll \omega_1$. Írjuk fel az (7.30) Euler-egyenletet csak az első rendű tagokat megtartva:

$$0 = \theta_1 \dot{\omega}_1 \quad (7.34)$$

$$0 = \theta_2 \dot{\lambda} - \omega_1 \mu (\theta_3 - \theta_1) \quad (7.35)$$

$$0 = \theta_3 \dot{\mu} - \omega_1 \lambda (\theta_1 - \theta_2) \quad (7.36)$$

A (7.34) egyenlet azt mondja nekünk, hogy $\omega_1 = \text{állandó}$. A (7.35) és (7.36) egyenleteket idő szerint deriválva kapjuk, hogy

$$\ddot{\lambda} = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2} \omega_1 \dot{\mu} \quad (7.37)$$

$$\ddot{\mu} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_3} \omega_1 \dot{\lambda} \quad (7.38)$$

A (7.37) egyenletben megjelenő $\dot{\mu}$ mennyiséget helyettesítsük be (7.36) egyenletből:

$$\ddot{\lambda} + \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3} \omega_1^2 \lambda = 0 \quad (7.39)$$

Mivel $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, ezért a λ előtt álló faktor pozitív, tehát a fenti másodfokú differenciálegyenlet megoldása szinuszos oszcilláció:

$$\lambda(t) = \lambda_0 \sin \left(\sqrt{\frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3}} \omega_1 t + \phi_0 \right) \quad (7.40)$$

Könnyen belátható, hogy hasonló eredményt kapunk μ időbeli változására is. Tehát az általunk akaratlanul okozott többi fő tengely irányú perturbáció csak elliptikusan oszcillál, a mozgás alapvetően marad az \mathbf{e}_1 tengely körüli forgás.

Amennyiben a fenti számolást végigvisszük a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező tengelyre: $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$, akkor is ugyanezt kapjuk, a (7.39) egyenletben a λ előtt álló faktor pozitív.

Más a helyzet a középső tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező irányban: $\theta_2 > \theta_1 > \theta_3$. Ekkor ugyanis a (7.39) egyenlet megoldása már nem szinuszos oszcilláció, hanem exponenciális lesz:

$$\lambda(t) = Ae^{\alpha_2 t} + Be^{-\alpha_2 t}, \quad (7.41)$$

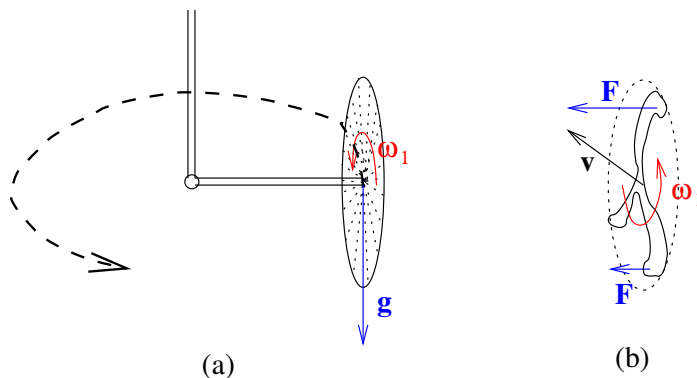
ahol

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3}} \quad (7.42)$$

Ez azt is jelenti, hogy a kis perturbáció megnő és a többi irányú forgás is láthatóvá válik. Természetesen, ekkor már nem alkalmazható ez az elsőrendű közelítés.

Összefoglalva tehát, megmutattuk, hogy egy test legkisebb és legnagyobb sajátértékéhez tartozó irányokban a szabad forgása stabil, azonban a középső sajátértékéhez tartozó irányban a szabad forgása instabil.

7.2. Feladat Ebben a részben két problémát vizsgálunk. Megmutatjuk, hogy ugyanarra a jelenségre vezethetők vissza. Az első probléma a 7.7 (a) ábrán látható. Itt egy tengelyen lévő kerék gömbcsuklóval kapcsolódik a függőleges tartórúdhoz. Ha a kerék nem forog, akkor elengedés után a tengely függőlegesen lefelé fog mozogni a gravitáció hatására. Ha azonban tengely vízszintes helyzetű mellett a tengelyen lévő kereket megpörgetjük, majd elengedjük, akkor nem ez történik, hanem a tengely megőrzi vízszintes helyzetét és elkezd a csukló körül körbe forogni.



7.7. ábra. (a) csuklón forgó kerék, mely a gravitáció hatására nem lefelé mozdul el, hanem körbe. (b) Bumeráng.

A gravitációból származó forgatónyomaték tehát lefelé szeretné fordítani a tengelyt, de az erre merőleges forgómozgás miatt mégsem arra, hanem egy harmadik merőleges irányba indul el a test.

A bumeráng egy olyan eszköz, amelyben a lapátok szárny-profilúak. Ezért a forgó mozgás hatására azokon a forgás tengelyével párhuzamos felhajtóerő keletkezik. Mivel

a bumerángot nem egyhelyben forgatjuk, hanem a forgómozgással párhuzamosan haladó mozgást is végez, ezért a lapátok a fenti helyzetben, mikor a haladó mozgás irányába forognak, gyorsabban mennek a levegőhöz képest, mint az alsók, ezért a lapátokra ható erő különböző lesz, ami szintén egy forgatónyomatékokat eredményez hasonlóan az előző példához és a végeredmény is hasonló vízszintes körmozgás, ami lehetővé teszi a bumeráng visszatértét.

Az alaphelyzet tehát mindkét esetben ugyanaz, van egy testünk, amely az egyik szabad tengelye mentén gyors forgómozgást végez, miközben arra merőlegesen forgatónyomaték lép fel. Írjuk fel az Euler-egyenleteket erre az esetre. Vizsgáljunk forgásszimmetrikus testet, amely a forgástengelye (\mathbf{e}_1) körül forog ω_1 szögsebességgel. Ebben az irányban a tehetetlenségi nyomatéka θ_{\parallel} . Az N forgatónyomaték hasson a \mathbf{e}_2 irányban. A forgásirányra merőleges tehetetlenségi nyomaték legyen θ_{\perp} :

$$\theta_{\parallel}\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(\theta_{\perp} - \theta_{\parallel}) = 0 \quad (7.43)$$

$$\theta_{\perp}\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(\theta_{\parallel} - \theta_{\perp}) = N \quad (7.44)$$

$$\theta_{\perp}\dot{\omega}_3 + \omega_2\omega_1(\theta_{\parallel} - \theta_{\perp}) = 0. \quad (7.45)$$

A (7.43) egyenlet ismét azt mondja nekünk, hogy súrlódás hiányában a nem csillapodik a forgómozgás, azaz $\omega_1 = \text{állandó}$. Vezessük be $\tau = (\theta_{\parallel} - \theta_{\perp})/\theta_{\perp}$ konstansot. Deriváljuk idő szerint még egyszer a (7.44) és (7.45) egyenleteket még egyszer:

$$\ddot{\omega}_2 = -\tau\omega_1\dot{\omega}_3 \quad (7.46)$$

$$\ddot{\omega}_3 = -\tau\omega_1\dot{\omega}_2. \quad (7.47)$$

Az egyenletek jobb oldalán álló $\dot{\omega}_3$ és $\dot{\omega}_2$ változókat az (7.45) és (7.44) egyenletekből behelyettesítjük:

$$\ddot{\omega}_2 = -\tau^2\omega_1^2 \omega_2 \quad (7.48)$$

$$\ddot{\omega}_3 = -\tau^2\omega_1^2 \omega_3 + \frac{N\tau\omega_1}{\theta_{\perp}}. \quad (7.49)$$

Pontosan azt kaptuk, amit a kísérletek mutatnak, egy \mathbf{e}_1 irányban forgó testre, a \mathbf{e}_2 irányba ható forgatónyomaték a \mathbf{e}_3 irányba növeli meg a test szögsebességét, míg a \mathbf{e}_2 irányban a szögsebesség zérus marad.

8. fejezet

Deformálható testek mechanikája

8.1. Általános mérlegegyenletek

A természettudományos vizsgálódásunknak (most elsősorban gondoljunk a fizikára) az az objektív alapja, hogy az univerzumunkban valamiféle rend van. És ezt a rendet az ember (jelesül most a fizikus) képes felismerni. Mintázatot vélünk tapasztalni a jelenségek minden szintjén. Ez teszi lehetővé azt, hogy matematikai modelleket gyártsunk, amelyek hűek és így belőlük számokkal megfogalmazható eredményeket kaphassunk. Ezeket aztán lehet a megfigyelésekkel, vagy tudatos mérésekkel ellenőrizni. Ha a modellünk jó, akkor számszerű egyezést fogunk tapasztalni. Azt mondjuk erre, hogy a modellünknek reálisnak kell lennie. Nem célunk most a modellalkotás filozófiai problémáiról beszélni. A kvantummechanikai tanulmányainknál ez úgysis elkerülhetetlen.

Ha egy törvény olyan, hogy nagyon sokféle természeti jelenségre értelmezhető, akkor az valami nagyon alapvető mintázatot, univerzális igazságot fogalmaz meg. A fizikus szeret ilyeneket találni, mert ez a dolgok lényegi megértését jelenti számára.

Ilyen univerzális törvényeket fogalmazzunk meg az ún. mérlegegyenletekben. Ezek extenzív fizikai mennyiségek nagyon általános (térbeli és időbeli) tulajdonságait fogalmazzák meg. Érvényes lehet anyagi dolgokra (szubsztancia), mint pl. egy városba tartózkodó emberek száma. Vagy pedig nem anyagi természetű dolgokra, valamiféle számmal jellemezhető tulajdonságra (attribútum) mint pl. az energia. Mint látni fogjuk, a példaként felhozott két fogalom nagyon távoli egymástól, mégis ugyanolyan mérlegegyenleteknek tesznek eleget.

A fizikai jelenségeket mindig a tér egy általunk jól elkülönített részében figyeljük meg. Ezt a térrészt egy zárt felülettel elválasztjuk a környezetétől. A felület által határolt térrészben lévő objektumok alkotják a fizika rendszert amelyet valamilyen extenzív vagy intenzív (reális) fizikai mennyiségekkel jellemzünk (lásd Termodinamika). Egy fizikai jellemző extenzívitása nagyon általános tulajdonságokat eredményez. A mérlegegyenletekben éppen ezeket fogalmazzuk meg.

Legyen w egy extenzív mennyiség (például: tömeg, energia, impulzus, töltés, stb.) és $\rho_w(\mathbf{r}, t)$ a w mennyiség *térfogatsűrűsége*. Ez azt jelenti, hogy a tér egy \mathbf{r} pontjában egy t időpillanatban egy dV térfogatelemben ebből a fizikai mennyiségből $dw = \rho_w dV$ van jelen. A $\rho_w(\mathbf{r}, t)$ mértékegysége tehát:

$$[\rho_w] = \frac{[w]}{\text{m}^3} \quad (8.1)$$

A w extenzív mennyiségből képzett $\rho_w(\mathbf{r}, t)$ térfogatsűrűség már intenzív mennyiség. Mivel a w mennyiség áramolhat ezért hasznos bevezetni a w mennyiség \mathbf{j}_w áramsűrűségét. Ez egy adott $d\mathbf{A}$ felületen egységnyi idő alatt átáramló w mennyiségét méri:

$$\mathbf{j}_w d\mathbf{A} = \frac{dw}{dt} \quad (8.2)$$

Az áramsűrűség mértékegysége:

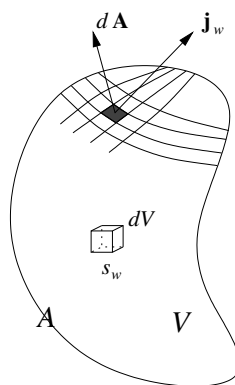
$$[j_w] = \frac{[w]}{\text{s m}^2}. \quad (8.3)$$

Az adott mennyiség nem csak áramolhat, hanem keletkezhet és eltűnhet is. Ezt a folyamatot a s_w forrassűrűséggel jellemezzük. Ez megadja, hogy egy elemi térfogatban egységnyi idő alatt mennyi w keletkezik, illetve tűnik el:

$$s_w dV = \frac{dw}{dt}. \quad (8.4)$$

A forrassűrűség mértékegysége:

$$[s_w] = \frac{[w]}{\text{s m}^3}. \quad (8.5)$$



8.1. ábra. Egy adott V térfogat a laborrendszerben. A $d\mathbf{A}$ felületelem vektor mindig merőleges a felületre és a térfogattól kifelé mutat.

Legyen adott a laborrendszerben egy A felületű V térfogatú tartomány. Ebben a tartományban található w mennyisége a következő:

$$w(t) = \int_V \rho_w(\mathbf{r}, t) dV \quad (8.6)$$

A tartományban a w extenzív mennyiség csak kétféle módon változhat: (i) vagy átlép a felületen, (ii) vagy belül keletkezik. A most bevezetett fogalmakkal ez a következő módon fogalmazható meg:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho_w(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \partial_t \rho_w(\mathbf{r}, t) dV = - \underbrace{\oint_A \mathbf{j}_w d\mathbf{A}}_{(i)} + \underbrace{\int_V s_w dV}_{(ii)} \quad (8.7)$$

Az egyenlet bal oldalán az idő szerinti deriválást át lehet vinni az integrálon, mivel a vizsgált térfogat időben állandó. Az A felületre vett integrál előtt minusz jel áll, mivel a $d\mathbf{A}$ felületelem vektor a testből kifelé mutat, tehát kifelé folyó áram esetén lesz pozitív az integrandus, ami viszont w csökkenését eredményezi.

Általánosabb lenne a fenti képlet, ha az összes integrál térfogat szerinti lenne. Ebben nyújt segítséget a Gauss-Osztrogradszkij-tétel[8] amely egy tetszőleges \mathbf{u} vektormennyiség térfogati és felületi integrálja között teremt kapcsolatot:

$$\oint_A \mathbf{u} d\mathbf{A} = \int_V \text{div} \mathbf{u} dV. \quad (8.8)$$

Mint már a Matematikai bevezetőben 1.2 is említettük a divergencia szemléletes jelentése az adott mennyiség lokális kitágulásának mértéke. A (8.8) egyenletet kihasználva kapjuk, hogy

$$\int_V \partial_t \rho_w dV = - \int_V \text{div} \mathbf{j}_w dV + \int_V s_w dV \quad (8.9)$$

Átrendezve:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_w - s_w \right) dV = 0 \quad (8.10)$$

A fenti egyenlet tetszőleges térfogat esetén igaz ez csak akkor teljesülhet, ha maga az integrandus is zérus:

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_w = s_w \quad (8.11)$$

Ez a differenciális mérlegegyenlet, amit szokás még kontinuitási egyenletnek is nevezni. Ha forrás nincsen ($s_w = 0$), akkor megmaradási tételről beszélünk:

$$\partial_t \rho_w + \nabla \cdot \mathbf{j}_w = 0 \quad (8.12)$$

8.1.1. Konvektív, konduktív áram

Az eddigiekben nem beszéltünk arról, hogy milyen konkrét extenzív mennyiségre kell gondolnunk, amikor a fizikában mérlegegyenletekről beszélünk. A későbbi szemlélet (elektrodinamika, kvantummechanika) kialakítása végett célszerű a történeti utat követni. Ez ugyanis szépen tükrözi az általánosításoknak a szükségszerűségét. Kiindulásul egy konkrét fizikai rendszerrel, a tömegpontrendszerrel foglalkozunk. Még hozzá olyannal, ahol a rendszer (makroszkopikus) térfogata akkora, hogy kontinuum eloszlású anyagmodell lehet használni. Ezt nevezzük folytonos anyageloszlású testnek, vagy egyetlen szóval közegnek. Az ilyen rendszer dinamikájával a kontinuummechanika foglalkozik.

A kontinuummechanikában a következő extenzív mechanikai mennyiségekre célszerű mérlegegyenleteket felírni.

Tömeg:	m	tömegsűrűség:	$\rho_m(\mathbf{r}, t) \equiv \rho(\mathbf{r}, t)$
Energia:	E	energiasűrűség:	$\rho_E(\mathbf{r}, t) \equiv \rho(\mathbf{r}, t)v^2(\mathbf{r}, t)/2$
Impulzus:	\mathbf{p}	impulzussűrűség:	$\rho_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \equiv \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$
Töltés:	Q	töltéssűrűség:	$\rho_Q(\mathbf{r}, t) \equiv dQ(\mathbf{r}, t)/dV$

Tömeg esetén, illetve elektrodinamikában a töltéssűrűség esetén általában nem írjuk ki az indexet. Az impulzuszóránymomentum mérlegegyenletével nem foglalkozunk, ugyanis nem mond lényegesen többet, mint az impulzuszóránymomentum mérleg. Majd alkalomadtán megemlítjük az idevonatkozó fizikai tudnivalókat.

Látható, hogy ezekben a fontos esetekben a anyagsűrűség, azaz az anyag pontok hordozzák az extenzív mennyiséget (impulzus, energia, perdület, töltés). Az egyszerűbb szóhasználat végett úgy beszélünk ezekről a fizikai mennyiségekről, mintha maguk is szubsztanciák, valamiféle megfogható dolgok, önálló anyagi létezők volnának, holott ezek a közeget alkotó tömegpontok dinamikai tulajdonságai. Mindegyik esetben mérlegegyenleteket tudunk használni. Ez az absztrakció teszi lehetővé majd azt, hogy a kontinuummechanikában kidolgozott sikeres szemléletet átvigyük a fizika más területeire is (elektrodinamika, kvantummechanika).

A következőkben az áramsűrűséget vizsgáljuk. Az áramsűrűségnek két fajtáját ismerjük, ezek a *konvektív áramsűrűség*:

$$\mathbf{j}_{w,v} = \rho_w \mathbf{v}, \quad (8.13)$$

valamint a *diffúziós áramsűrűség* izotrop esetre:

$$\mathbf{j}_{w,d} = -D \nabla \rho_w \quad (8.14)$$

A konvektív áramsűrűséget a tömegpontok makroszkopikus rendezett elmozdulása, áramlása hozza létre. Ezért szerepel benne az áramlási sebesség. A konduktív áramsűrűséghez nem csatolódik makroszkopikus rendezett elmozdulás. A példaként felírt diffúziós áramot a részecskék rendezetlen, véletlenszerű mozgása idézi elő. És ezt a makroszkopikus skálán

a tömegsűrűség inhomogenitásával tudjuk figyelembe venni (Fick-féle egyenlet). A jelenség természetéből fakad tehát, hogy ennek részletes mikrofizikai hátterével a statisztikus fizika foglalkozik.

Írjuk fel a kontinuitási egyenletet mindkét esetre.

$$\partial_t \rho_w + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{v}) = s_w \quad (8.15)$$

$$\partial_t \rho_w - D \Delta \rho_w = s_w \quad (8.16)$$

A (8.16) egyenlet viszont a közismert diffúziós egyenlet [9], ahogy azt vártuk is. Általában nem mindig tudunk kiindulásul ilyen konduktív áramokat felírni. Ezek legtöbbször az alap dinamikai egyenleteknek a kontinuitási egyenletbe való átírásakor kijönnek. Röviden azt mondhatjuk, hogy minden olyan áramsűrűség, amelyik nem konvektív, azaz nem írható (8.13) alakba, az szükségképpen konduktív lesz még akkor is, ha a szemléletünk ezt nem látja.

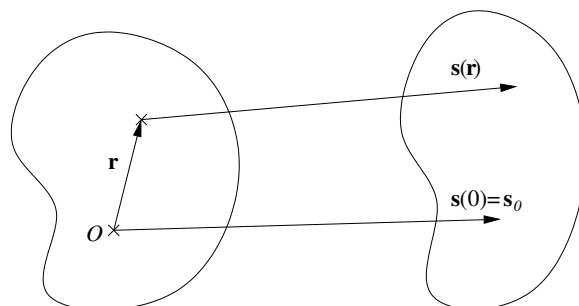
8.2. Deformálható testek kinematikája

A kontinuum anyagmodellt az előzőekben már sikeresen használtuk egy speciális pontrendszer, a merev testek dinamikájának a tárgyalásakor (7 fejezet). Most elhagyjuk azt a megkötést, amely a merev testeket merevvé tette, azaz megengedjük, hogy a test pontjai közötti távolság megváltozzon. Ez a változás azonban nem tetszőleges, hanem a testre ható külső és belső erők határozzák meg. A pontrendszer szemléletben megjelenő belső erők tulajdonsága a makroszkopikus skálán az illető anyagra jellemző anyagi tulajdonságként jelenik meg. A deformálható testeknek, közegeknek ezek a makroszkopikus jellemzői definiálják azt, hogy gáz, folyadék vagy rugalmas közeg dinamikáját kell meghatároznunk.

Először a deformálható testek mozgásának a leírásával kell foglalkoznunk és csak ennek ismeretében térhetünk át a dinamikára.

A már ismert technikát követve vegyünk fel egy álló vonatkoztatási rendszert, a labor rendszert. A deformálható testünk mozgását ebben a labor rendszerben fogjuk vizsgálni. A test egy pontját a labor rendszerben elfoglalt helye alapján azonosítjuk. Ha a deformálható test (a közeg) mozgásban van, akkor minden pontjának a helye az időben változni fog. Ez a fajta szemlélet túl általános és ugyanúgy nem vezet eredményre, mint azt a pontrendszerek esetében láttuk. Szűkítsük le a vizsgálatunkat csak a deformálhatóságra. Mint azt láttuk, ez azt jelenti, hogy (ellentétben a merev testekkel) most a közeg pontjai közötti távolság már nem marad állandó. Sőt, ennek a változásnak a meghatározása jelenti az új feladatot.

Összehasonlítva a merev testek mozgásával azt várjuk, hogy a test pontjainak elmozdulását három különböző folyamatra tudjuk bontani: Transzláció, forgás, deformáció. A deformáció vizsgálatához célszerű az első két elmozdulástípust leválasztani az anyag



8.2. ábra. Deformálható test paraméterezése laborrendszerben. Az eredeti állapot pontjait a \mathbf{r} helyvektor paraméterezi, az elmozdulást a $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ vektor.

mozgásából. Vizsgálatunkat lineáris rendig fogjuk csak elvégezni, ezért megköveteljük, hogy a test pontjainak elmozdulása legyen kicsi.

A probléma jellegéből fakadóan célszerű a közeg pontjainak a helyzetét a közeg egy kiválasztott pontjához viszonyítva megadni amint a 8.2 ábra szemlélteti. Legyen ez az pont 0, amely természetesen mozoghat is. A közeg pontjait az 0 pontból mért helyvektorral azonosítjuk. Egy pont mozgását az $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ függvény írja le. Ez lesz a keresett mennyiségünk.

Legyen az 0 referenciapont elmozdulása \mathbf{s}_0 . Ez a mennyiség írja le a közeg translációját. Ezt az elemi komponenszt érdemes kihagyni a deformáció tanulmányozásából, ezért mivel kinematikáról van szó megtehetjük, hogy az origót mindig az \mathbf{s}_0 pontba rakjuk és az \mathbf{r} helyvektorokat innét mérjük. Emellett bevezetjük a

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r}) - \mathbf{s}_0. \quad (8.17)$$

mennyiséget, ami a deformáció translációtól megtisztított részét tartalmazza. A fenti definíció segítségével sikerült az \mathbf{s}_0 tiszta elmozdulást kitranszformálni a \mathbf{s} vektorokból. Mivel a deformációra vagyunk kíváncsiak le kell választanunk még a forgómozgást is. Kis elmozdulásokra sorbafejthetjük a relatív elmozdulás i -edik ($i = 1, 2, 3$) komponensét első rendig:

$$\Delta \mathbf{s}_i(\mathbf{r}) \simeq \frac{\partial s_i}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial s_i}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial s_i}{\partial x_3} x_3 = \sum_{j=1}^3 (\partial_j s_i) x_j = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{D}\mathbf{s})_{ij} x_j \quad (8.18)$$

Tehát úgy néz ki, hogy első rendben a relatív elmozdulás vektor lineáris függvénye a helyvektornak, azaz:

$$\Delta \mathbf{s}(\mathbf{r}) = (\mathbf{D}\mathbf{s})\mathbf{r}, \quad (8.19)$$

ahol a $\mathbf{D}\mathbf{s} = \nabla \otimes \mathbf{s}$ a *deriválttenzor*, ami a nabla operátor és az elmozdulás vektor diadikus szorzata.

Mint minden tenzor, \mathbf{Ds} is előállítható egy szimmetrikus $\boldsymbol{\varepsilon}$ és egy \mathbf{a} antiszimmetrikus tenzor összegeként:

$$\mathbf{Ds} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{a}, \quad (8.20)$$

ahol $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ és $a_{ij} = -a_{ji}$, minden i, j párra. Az előállítás:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\partial_j s_i + \partial_i s_j) \\ a_{ij} &= \frac{1}{2} (\partial_j s_i - \partial_i s_j). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Az elmozdulás vektort tehát három részre bontottuk. Meg fogjuk mutatni, hogy az antiszimmetrikus \mathbf{a} rész jellemzi a forgatást és így a $\boldsymbol{\varepsilon}$ írja le a test deformációját. Azaz:

$$\mathbf{s} = \underbrace{\mathbf{s}_0}_{\text{eltolás}} + \underbrace{\mathbf{ar}}_{\text{forgatás}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}}_{\text{deformáció}} \quad (8.22)$$

Az eltolás mértékegysége a méter $[\mathbf{s}_0] = \text{m}$, az elforgatás és deformáció viszont 1 dimenziójú $[a_{ij}] = [\varepsilon_{ij}] = 1$.

8.2.1. Elforgatás

Mutassuk meg, hogy a \mathbf{Ds} deriválttenzor antiszimmetrikus része a forgatás.

$$\begin{aligned} \mathbf{ar} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}y + a_{13}z \\ a_{23}z - a_{12}x \\ -a_{13}x - a_{23}y \end{pmatrix} \\ d\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} d\phi_y z - d\phi_z y \\ d\phi_z x - d\phi_x z \\ d\phi_y y - d\phi_y x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.23)$$

A (8.23) egyenlet felső sorában Descartes koordináta-rendszerben kifejtettük az elmozdulás antiszimmetrikus részét, az alsó sorban egy infinitezimális forgatást írtunk fel. Nyilvánvaló, hogy az alábbi szögválasztással a két kifejezés azonos lesz:

$$\begin{pmatrix} d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{23} \\ a_{13} \\ -a_{12} \end{pmatrix} \quad (8.24)$$

Tehát ha infinitezimális elmozdulásokat vizsgálunk, akkor a derivált tenzor antiszimmetrikus része a test merev testként történő elfordulását írja le.

8.2.2. Deformáció

A fentiekben láttuk, hogy \mathbf{s}_0 és \mathbf{a} tenzorok olyan transzformációkat írnak le, amelyek során a test pontjainak egymáshoz viszonyított távolsága nem változik. Tehát a test deformációját a $\boldsymbol{\varepsilon}$ tenzor adja meg:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j s_i + \partial_i s_j) \quad (8.25)$$

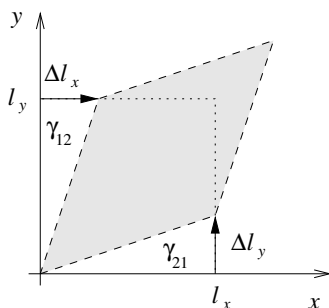
Vizsgáljuk meg a deformációs tenzor különböző elemeinek jelentését! Két pont közti távolság megváltozása tehát a következőképpen írható:

$$\Delta \mathbf{s}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}. \quad (8.26)$$

Legyen $\mathbf{r} = (l_x, l_y, l_z)$, ekkor a főátlóban lévő elemek jelentése:

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \varepsilon_{ii} l_i \\ \varepsilon_{ii} &= \frac{\Delta s_i}{l_i}, \quad i \in \{x, y, z\} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Azaz a főátlóban lévő elemek a deformáció hatására létrejött relatív megnyúlást fejezik ki.



8.3. ábra. Nyírási deformáció, a deformáció tenzor nem főátlóbeli elemeinek szemléltetése.

A mellékátlóban szereplő tagok jelentését 8.3 ábra szemlélteti. A ε_{yx} azt mondja meg, hogy az egységnyi hosszú x irányú szakasz mennyit deformálódott y irányban, azaz

$$\Delta l_y = \varepsilon_{yx} l_x. \quad (8.28)$$

Mivel $\boldsymbol{\varepsilon}$ szimmetrikus tenzor, ezért az y irányú egységszakasz is ugyanennyit deformálódik x irányban:

$$\Delta l_x = \varepsilon_{xy} l_y \equiv \varepsilon_{yx} l_y \quad (8.29)$$

Tehát a deformáció során az egységnyezetből paralelogramma lesz. Ezt a deformációt nevezzük nyírásnak, vagy szögdeformációnak. Kis deformáció esetén az oldalak szögelfordulása:

$$\gamma_{xz} \equiv \gamma_{yx} \simeq \tan \gamma = \varepsilon_{yx} = \frac{\Delta s_y}{l_x} \quad (8.30)$$

8.2.3. Térfogatváltozás

A deformáció hatására a test térfogata megváltozhat. Mivel kis deformációkkal foglalkozunk ezért csak ε első rendben vizsgáljuk a problémát. Az ε deformáció-tenzor szimmetrikus ezért sajátértékei valósak és létezik főtengeley-rendszere, amelyben diagonális lesz a deformációmátrix. Ilyenkor a deformáció pusztán megnyúlásokból áll:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

Az egység sugarú gömbből ellipszoid lesz, ahol az ellipszis tengelyei (8.27) egyenlet alapján $(l'_1, l'_2, l'_3) = (1 + \varepsilon_{11}, 1 + \varepsilon_{22}, 1 + \varepsilon_{33})$ nagyságúak. A térfogatváltozás első rendig

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(l'_1 l'_2 l'_3 - 1) = \frac{4}{3}\pi(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \mathcal{O}(\varepsilon_{ii}^2). \quad (8.32)$$

A relatív térfogatváltozás tehát $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

A térfogatváltozást más úton is meg lehet kapni. Most tetszőleges koordináta-rendszerben írjuk fel az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ egységvektorok által kifeszített kocka térfogatát:

$$V = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \quad (8.33)$$

Közismert, hogy

$$(a \times b) \cdot c = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Illetve a deformáció hatására megváltozott egységvektorok a következők lesznek:

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} \\ 1 + \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{32} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ 1 + \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

Ezért a deformáció:

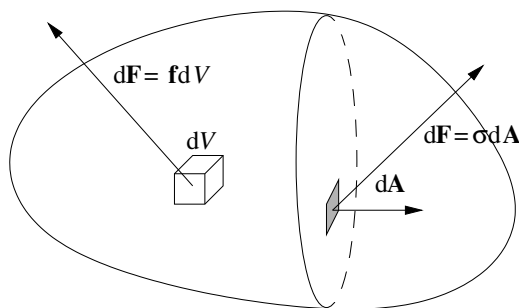
$$\frac{\Delta V}{V} = \det(1 + \varepsilon) \simeq \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{Tr}(\varepsilon) \quad (8.36)$$

Tehát még egyszer megkaptuk ugyanazt az eredményt. Érdemes a kapott képletbe visszairni $\boldsymbol{\varepsilon}$ definícióját:

$$\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \partial_1 s_1 + \partial_2 s_2 + \partial_3 s_3 = \text{divs} \quad (8.37)$$

Azaz térfogatváltozás az elmozdulásvektor divergenciájával egyezik meg. Ez viszont pont megfelel a divergencia szemléletes jelentésének. Továbbá, ha olyan anyagunk van, amely összenyomhatatlan, akkor abban divs azaz az elmozdulások divergenciája zérus.

8.3. Erőhatások deformálható testekben



8.4. ábra. Deformálható testben ható térfogati és felületi erők szemléltetése.

Az előzőekben tárgyalt deformációk erők hatására jönnek létre. A deformálható testekben fellépő erőhatások lehetnek *térfogati* és *felületi erők*. A 8.4 ábra szemlélteti ezeket az erőhatásokat. Mivel az erők helyről helyre változhatnak ezért érdemes ezek sűrűségével számolni. A térfogati erőssűrűséget a \mathbf{f} szimbólummal jelöljük és az infinitezimális dV térfogatra ható erő:

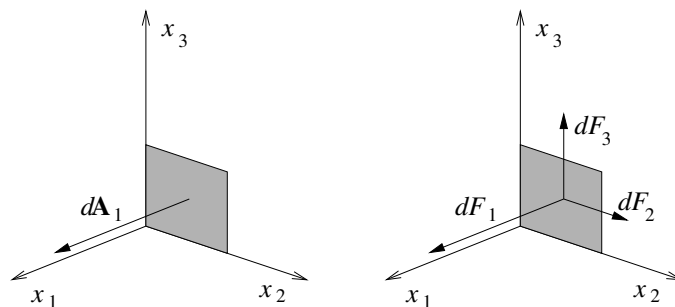
$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}dV, \quad (8.38)$$

amiből jól látható, hogy a térfogati erőssűrűség mértékegysége $[\mathbf{f}] = \text{N/m}^3$. A felületi erőssűrűség egy infinitezimális felületelem és egy infinitezimális erő között teremt kapcsolatot. Mivel mindkét mennyiség vektor, ezért a felületi erőssűrűség egy tenzor lesz, amit $\boldsymbol{\sigma}$ -val jelölünk. Neve *mechanikai feszültség tenzor*. Elemeinek mértékegysége: $[\sigma_{ij}] = \text{N/m}^2$. A $d\mathbf{A}$ felületen létrejövő erőhatást a következőképpen kaphatjuk meg:

$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}d\mathbf{A}. \quad (8.39)$$

Vizsgáljuk meg a mechanikai feszültség tenzor elemeinek jelentését! Válasszunk egy \mathbf{e}_1 normálvektorú $d\mathbf{A}_1$ felületet. Az erre ható erőt a következőképpen számíthatjuk ki:

$$d\mathbf{F}(d\mathbf{A}_1) = \begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}dA_1 \\ \sigma_{21}dA_1 \\ \sigma_{31}dA_1 \end{pmatrix} \quad (8.40)$$



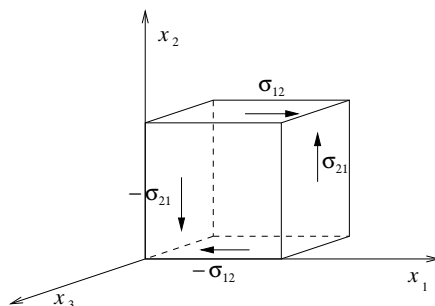
8.5. ábra. A mechanikai feszültség-tenzor elemeinek jelentésének szemléltetése.

A kapott erőkomponenseket a 8.5 ábra szemlélteti. Jól látható, hogy a σ_{11} a felület normálisának irányában, míg a másik két komponens a felület síkja irányában fejt ki erőhatást. Hasonlóan megmutatható a többi komponensre is, hogy σ főátlóbeli komponensei (σ_{ii}) a *húzófeszültséget*, a többi elem (σ_{ij} , $i \neq j$) a *nyírófeszültséget* írja le.

Megmutatható még, hogy a σ feszültség tenzor szimmetrikus. Válasszunk egy kis elemi térfogatot, amelyben a következő feszültség-tenzor hat:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

Ekkor a kis kockán a 8.6 ábrán látható erők hatnak. Jól látható, hogy σ_{12} a kocka két átellenes lapján ellentétes irányú erőt hoz létre, amely forgatónyomatékkal hat az elemi térfogatra. Statikában nem lehet gyorsulása a rendszernek, ezért nem lehet kompenzálatlan forgatónyomaték az elemi térfogatokon, ezért $\sigma_{21} = \sigma_{12}$. Tehát a két tenzorelem megegyezik, azaz a feszültség-tenzor *szimmetrikus*.



8.6. ábra. A feszültség-tenzor elemei hatására létrejövő forgatónyomaték szemléltetése.

8.4. Rugalmas közegek dinamikája

A rugalmas közegben fellépő erők és a deformáció nem függetlenek egymástól, hiszen erők hatására deformálódik a test és viszont, a deformálódott testben erők, feszültségek lépnek fel. Kis deformációkra ezt a kapcsolatot lineárisan lehet közelíteni, de sok esetben nagyobb elmozdulások esetén is fennmarad a lineáris kapcsolat, mint pl. rugó, húr. Ezt a lineáris kapcsolatot Hooke-törvénynek hívjuk.

Robert Hooke 1660-ban először anagrammaként publikálta a fenti lineáris összefüggést *"ceiinnosssttu"*, azaz *"ut tensio, sic vis"*. Jelentése, amekkora megnyúlás, akkor az erő. Most mi ennek egy általános változatát használjuk, és a teljes három dimenziós deformációra alkalmazzuk. Két tenzor a feszültség σ és a deformáció ε között kell kapcsolatot teremteni, ami szintén egy tenzor:

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (8.42)$$

ahol $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. A c_{ijkl} tenzor egy 81 elemű mátrix, azonban az elemei nem függetlenek egymástól. Mind σ , mind ε szimmetrikus és csak 6 – 6 független elemük van ezért c_{ijkl} maximum 36 független elemet tartalmazhat. Megmutatható, a deformációs energia változatlanóságával, hogy c_{ijkl} is szimmetrikus és legáltalánosabb esetben is csak 21 független eleme lehet.

Izotrop anyagok esetén, ahol a fizikai tulajdonságok irányfüggetlenek, ezért ε és σ egyszerre diagonalizálható. Ilyenkor csak két független állandó marad a deformáció és feszültség kapcsolatában, ahol az egyik (*bulk modulus*) a térfogatváltozással, a másik (*shear modulus*) a nyírással szembeni ellenállást fejezi ki. Ezt nézzük meg részletesen!

Vizsgáljunk meg izotrop anyag esetén a feszültség és a deformáció közti kapcsolatot. A deformáció főtengeley-rendszerében a feszültség is diagonális, mivel az offdiagonális elemek szimmetriát sértenének egy izotrop rendszerben. Írjuk fel σ_{11} -et!

$$\sigma_{11} = a\varepsilon_{11} + b\varepsilon_{22} + c\varepsilon_{33}, \quad (8.43)$$

ahol a, b, c konstansok c_{ijkl} megfelelő elemei. Az 1-es irányból nézve a 2-es és 3-as irány ekvivalens ezért azok hatása is az. Tehát $c \equiv b$. Hasonlóan a többi koordinátára felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= a\varepsilon_{11} + b(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{22} &= a\varepsilon_{22} + b(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{33} &= a\varepsilon_{33} + b(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{aligned} \quad (8.44)$$

Vezessük be az alábbi állandókat!

$$\begin{aligned} \lambda &= b \\ 2\mu &= a - b \end{aligned} \quad (8.45)$$

Ekkor a (8.44) egyenlet a következőképpen írható

$$\sigma_{ii} = 2\mu\varepsilon_{ii} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad (8.46)$$

ahol $i = \{1, 2, 3\}$. Ugyanez az egyenlet tenzor alakban:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} \quad (8.47)$$

Mivel (8.47) koordináta független alak és $\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ nem függ a forgatástól, ezért az egyenlet tetszőleges bázisban igaz lesz. Komponensenként kiírva:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij}. \quad (8.48)$$

A λ, μ párost Lamé-állandóknak nevezzük. Bár a levezetés így volt egyszerűbb és a továbbiakban 8.47 egyenletet fogjuk használni a mindennapokban leggyakrabban nem a Lamé-állandókat használják. Gyakoribb párok a (K, G) , ahol K az összenyomhatóság (*bulk modulus*), G a nyírási rugalmassági modulus (*shear modulus*), illetve a (E, ν) , ahol E a Young, vagy rugalmassági modulus, ν a Poisson-tényező. Kapcsolatukat a 8.1 táblázat tartalmazza.

	(λ, μ)	(K, G)	(E, ν)
(λ, μ)	(λ, μ)	$(K - \frac{2G}{3}, G)$	$(\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \frac{E}{2(1+\nu)})$
(K, G)	$(\lambda + \frac{2\mu}{3}, \mu)$	(K, G)	$(\frac{E}{3(1-2\nu)}, \frac{E}{2(1+\nu)})$
(E, ν)	$(\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)})$	$(\frac{9KG}{3K+G}, \frac{3K-2G}{2(3K+G)})$	(E, ν)

8.1. táblázat. Az izotrop Hooke-törvény paramétereinek közötti összefüggés.

A különböző paraméterek meghatározása a következő:

- *Összenyomhatóság:*

$$K = -V \frac{dP}{dV} \quad (8.49)$$

Izotrop nyomás hatására létrejött relatív térfogatváltozás.

- *nyírási rugalmassági modulus:*

$$G = \frac{F}{A \arctan \theta}, \quad (8.50)$$

ahol az F nyíróerő az arra merőleges A felületre hatva θ szögdeformációt hoz létre.

- *Rugalmassági modulus:*

$$E = \frac{d\sigma_{ii}}{d\varepsilon_{ii}}, \quad (8.51)$$

A nyomófeszültség, illetve a fajlagos összenyomódás hányadosa.

- *Poisson-tényező:*

$$\nu = -\frac{d\varepsilon_{\text{trans}}}{d\varepsilon_{\text{axial}}}, \quad (8.52)$$

Ez azt fejezi ki, hogy a tranzverzális megnyúlás milyen mértékű axiális megnyúlással párosul.

Végül pedig írjuk fel a Hooke-törvényt (E, ν) állandókkal tenzoros alakban!

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\nu}{E}[\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma}], \quad (8.53)$$

illetve

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \quad (8.54)$$

8.5. A kontinuummechanika mozgásegyenlete

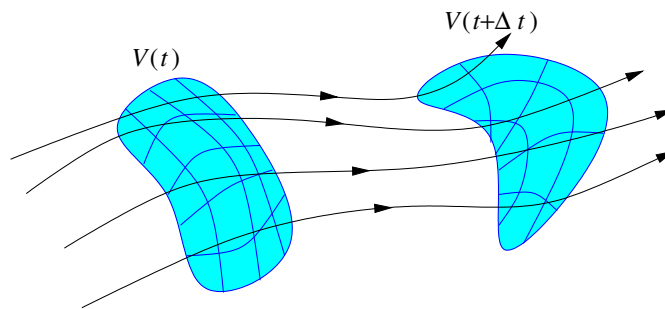
A kontinuummechanika célja a közegekre jellemző mozgásegyenletek felírása. Természetesen csak a Newton egyenletekből tudunk kiindulni, hiszen ez fogalmazza meg a mechanika alaptörvényeit, így a mozgásegyenletet is. Ez azonban tömegpontokra mond ki törvényeket. Kapcsolatot kell tehát teremteni a pontmechanika és a kontinuummechanika között. Ebben a fejezetben megnézzük, hogy mi lesz Newton II-ből kontinuum esetén:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (8.55)$$

Vizsgáljuk a közeg egy V térfogatú, A felületű, m tömegű és \mathbf{p} impulzusú tartományának mozgását! Ezt úgy is lehet tekinteni, hogy a közeg egy tartományát befestjük kékre és követjük a kék paca mozgását (lásd 8.7 ábra).

Két lehetőségünk van a közegmozgás leírására:

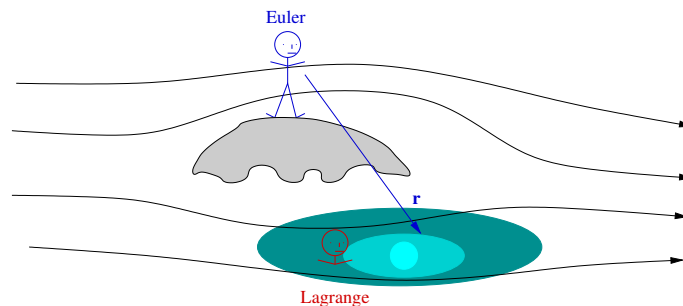
1. **Lagrange-szemlélet:** A V térfogatot, mint tömegpontot tekintjük és a mozgását követjük. Ez az együttmozgó, vagy Lagrange-szemlélet.



8.7. ábra. Áramló térfogat (kék paca) szemléltetése.

2. **Euler-szemlélet:** A labor rendszerben rögzített \mathbf{r} pontban figyeljük a közeg mozgását az idő függvényében. Ez a térelméleti, vagy Euler-szemlélet.

A fenti kék pacás mintánál maradva, ez olyan, mintha a kék pacával együtt **Lagrange** is a vízbe szállna és úgy figyelné a közeg mozgását, míg **Euler** a parton egy pontot figyel (8.8 ábra).



8.8. ábra. Áramló térfogat (kék paca) szemléltetése.

8.5.1. Lagrange-féle mozgásegyenlet

A V térfogatú rész impulzusa az alábbiak szerint írható fel:

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{v} dV \quad (8.56)$$

Ezt felhasználva írjuk fel a mozgásegyenletet:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{f} dV + \oint_A \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} \quad (8.57)$$

Használjuk ki, hogy $dm = \rho dV$ és vizsgáljuk meg az egyenlet bal oldalán az integrandust:

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathbf{v} dV) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} dm) \quad (8.58)$$

Mivel az együttmozgás során a mozgó közeg tömege nem változik, ezért

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} dm) = dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (8.59)$$

Azaz

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dV \quad (8.60)$$

Most vizsgáljuk meg az (8.57) egyenlet feszültséget tartalmazó tagjának i komponensét!

$$\left[\oint_A \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} \right]_i = \oint_A \sum_j \sigma_{ij} dA_j \quad (8.61)$$

Definiáljuk a következő vektorokat:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}), \quad (8.62)$$

ahol $i \in \{1, 2, 3\}$. Komponensenként:

$$(\boldsymbol{\sigma}_i)_j = \sigma_{ij} \quad (8.63)$$

A $\boldsymbol{\sigma}_i$ olyan mint egy vektormező, amely a feszültség-tenzor egy-egy sorát tartalmazza:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}_3 \end{pmatrix} \quad (8.64)$$

Ekkor a (8.61) egyenlet a következőképpen alakítható:

$$\oint_A \sum_j \sigma_{ij} dA_j = \oint_A \boldsymbol{\sigma}_i d\mathbf{A} \quad (8.65)$$

Kihasználva a Gauss-Osztrogradszkij-tételt[8] azt kapjuk, hogy

$$\oint_A \boldsymbol{\sigma}_i d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_i dV = \int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_i dV, \quad (8.66)$$

ahol $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$ egy vektormező divergenciáját jelöli és definíciója:

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_i \equiv \sum_j \partial_j \sigma_{ij} \quad (8.67)$$

A (8.57) egyenletet tehát a következőképpen írhatjuk át:

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dV \quad (8.68)$$

Mivel ez tetszőleges térfogatra igaz, ezért az integrandusoknak is ki kell elégíteni az egyenletet, azaz:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad (8.69)$$

Ez a Lagrange-féle mozgásegyenlet.

8.5.2. Euler-féle mozgásegyenlet

Először is definiáljuk a szubsztanciális deriváltat, amit már a 8.1.1 fejezetben megemlítettünk. Vizsgáljuk egy $X(\mathbf{r}, t)$ mennyiség időbeli változását együttmozgó rendszerben!

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(\mathbf{r}, t) &= \frac{d}{dt} X(\mathbf{r}(t), t) = \partial_t X + \partial_1 X \frac{dx_1}{dt} + \partial_2 X \frac{dx_2}{dt} + \partial_3 X \frac{dx_3}{dt} = \\ &= \partial_t X + \mathbf{v} \operatorname{grad}(X) \end{aligned} \quad (8.70)$$

Azaz a szubsztanciális derivált azt fejezi ki, hogy egy mennyiség megváltozása létrejöhet a mennyiség explicit időbeli változásával, illetve áramlás általi megváltozással. A kék paca áramlására visszatérve, az első tag a paca szétterülését, míg a második annak a közeggel együttmozgását fejezi ki.

A (8.57) egyenlet bal oldalán az impulzussűrűség idő szerinti deriváltja található. A szubsztanciális deriváltat, illetve a Gauss-Osztrogradszkij-tételt kihasználva felírhatjuk (8.57) i komponensét:

$$\int_V \rho \partial_t v_i dV + \sum_j \rho v_j \partial_j v_i dV = \int_V \mathbf{f}_i + (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_i dV. \quad (8.71)$$

Írjuk fel a tömegmegmaradást a (8.11) kontinuitási egyenlet alapján:

$$\partial_t \rho + \sum_j \partial_j (\rho v_j) = 0 \quad (8.72)$$

Adjuk hozzá a (8.71) egyenlet bal oldalához a (8.72) tömegmegmaradás v_i -szereség!

$$\int_V (\rho \partial_t v_i + v_i \partial_t \rho) dV + \int_V \left[\sum_j \rho v_j \partial_j v_i + v_i \partial_j (\rho v_j) \right] dV = \int_V \mathbf{f}_i + (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_i dV. \quad (8.73)$$

A parciális integrálásokat összevonva kapjuk, hogy

$$\int_V \left[\partial_t (\rho v_i) + \sum_j \partial_j (\rho v_i v_j) \right] dV = \int_V \mathbf{f}_i + (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_i dV. \quad (8.74)$$

Elhagyva az integrálást, és használva a diadikus szorzat (1.7) definícióját, megkapjuk a mozgásegyenlet Euler-alakban:

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f}. \quad (8.75)$$

Vegyük észre, hogy az Euler-féle mozgásegyenlet egy impulzummérleg egyenlet! Nézzük a (8.11) egyenletet!

$$\frac{\partial\rho_w}{\partial t} + \nabla\mathbf{j}_w = s_w \quad (8.76)$$

- *Impulzus sűrűség:* $\rho_w = \rho v_i$
- *Impulzus áramsűrűség:* $(j_w)_k = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$
- *Impulzus forrás-sűrűség:* $s_w = f_i$

Az Euler és Lagrange mozgásegyenletek ugyanazt a folyamatot írják le más szemzőből és más koordinátákat használva.

Alakítsuk át (8.72) egyenletet!

$$\begin{aligned} \partial_t\rho + \sum_j \partial_j(\rho v_j) &= 0 \\ \partial_t\rho + \sum_j v_j \partial_j\rho + \sum_j \rho \partial_j v_j &= 0 \end{aligned} \quad (8.77)$$

A bal oldal első két tagja éppen ρ szubsztanciális deriváltja. Azaz

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad (8.78)$$

Amiből következik, hogy ha a közeg összenyomhatatlan, ρ =állandó, azaz $\frac{d}{dt}\rho=0$, akkor olyan az áramlás, hogy

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \quad (8.79)$$

A divergenciamentes vektorterekre lehet úgy is gondolni, mint összenyomhatatlan folyadék áramlására.

8.6. Közegmozgás

Ahhoz, hogy le tudjuk írni egy közeg mozgását kapcsolatot kell teremtenünk a ρ sűrűség, a \mathbf{v} sebesség és a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültség között a tér minden pontjában minden időpillanatban figyelembe véve a határfeltételeket. Ez összesen $1 + 3 + 6 = 10$ ismeretlent jelent. Eddig

két egyenletet alkottunk meg, a tömeg-megmaradást (8.11), és a Lagrange-, vagy Euler-mozgásegyenletet, (8.69), illetve (8.75). Mivel a mozgásegyenletet vektoriális, ezért ez 4 egyenletet jelent.

A hiányzó egyenlet \mathbf{v} és $\boldsymbol{\sigma}$ között kell, hogy kapcsolatot teremtsen, amely megmondja, hogy a relatív elmozdulások milyen feszültséget keltenek az anyagban. Ez az, ami különbséget tesz különböző anyagok (pl. szilárd deformálható, vagy folyadék) áramlása között.

8.6.1. Rugalmas közeg mozgása

Írjuk le izotrop Hooke-anyag (8.4 fejezet) mozgását! A Hooke-törvény (8.47) az elmozdulás és a feszültség között teremt kapcsolatot:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} \quad (8.80)$$

A mozgásegyenletekben $\text{div}\boldsymbol{\sigma}$ a feszültség divergenciája szerepel, ezért fejezzük ki azt a \mathbf{s} elmozdulásvektorral, hiszen ez utóbbiból lehet származtatni a sebességet!

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij} \\ \sigma_{ij} &= \mu\partial_j s_i + \mu\partial_i s_j + \lambda\delta_{ij} \sum_k \partial_k s_k, \end{aligned} \quad (8.81)$$

ahol kihasználtuk a deformáció definícióját (8.21). Most írjuk fel a feszültség divergenciáját!

$$\begin{aligned} (\text{div}\boldsymbol{\sigma})_i &= \sum_j \partial_j \sigma_{ij} \\ (\text{div}\boldsymbol{\sigma})_i &= \underbrace{\mu \sum_j \partial_j \partial_j s_i}_{\Delta s_i} + \underbrace{\mu \partial_i \sum_j \partial_j s_j}_{\text{divs}} + \lambda \underbrace{\sum_j \partial_j \delta_{ij}}_{\partial_i} \underbrace{\sum_k \partial_k s_k}_{\text{divs}} \end{aligned} \quad (8.82)$$

Azaz most már vektoriális alakban:

$$\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \mu\Delta\mathbf{s} + (\mu + \lambda)\text{grad}(\text{divs}) \quad (8.83)$$

Mivel az $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ függvény az eredeti nyugalmi helyzetet írja le, $\partial_t\mathbf{s}$ már eleve az együttmozgó sebességet jelöli, mivel a szubsztanciális deriválás szerint (8.70)

$$\frac{d}{dt}v_i = \partial_t v_i + \underbrace{\sum_j v_j \partial_j v_i}_{\mathcal{O}(v^2)} \quad (8.84)$$

második tagja $\mathcal{O}(v^2)$ nagyságrendű ezért szilárd testekben elhanyagolható. Azaz:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \simeq \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \quad (8.85)$$

A Lagrange-féle mozgásegyenlet (8.69) deformálható szilárd testek esetén a következőképpen írható:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{s} + (\mu + \lambda) \text{grad}(\text{div} \mathbf{s}) + \mathbf{f} \quad (8.86)$$

Most nézzük meg a fenti egyenlet divergenciáját olyan esetben, amikor $\text{div} \mathbf{f} \equiv 0$, kihasználva a Young-tételt, hogy a parciális deriváltak sorrendje felcserélhető!

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 (\nabla \mathbf{s}) &= \mu \Delta (\nabla \mathbf{s}) + (\mu + \lambda) \nabla^2 (\nabla \mathbf{s}) \\ \rho \partial_t^2 (\nabla \mathbf{s}) &= (\lambda + 2\mu) \Delta (\nabla \mathbf{s}) \end{aligned} \quad (8.87)$$

A jól ismert hullámegyenlethez jutottunk a deformálható divergenciájára. Ez azt jelenti, hogy a deformáció divergenciája megváltozása terjed tovább az anyagban, azaz kompressziós hullámokról beszélhetünk. A terjedés sebességét is le tudjuk olvasni:

$$c_{\text{kompr}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (8.88)$$

Most nézzük meg a (8.86) egyenlet rotációját! Használjuk ki, hogy $\text{rotgrad} X \equiv 0$!

$$\rho \partial_t^2 (\nabla \times \mathbf{s}) = \mu \Delta (\nabla \times \mathbf{s}) \quad (8.89)$$

Megint egy hullámegyenletre jutottunk, most azonban az elmozdulás rotációjára, azaz a torzióra. A torziós hullámok terjedési sebessége:

$$c_{\text{torz}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (8.90)$$

Azaz a torziós hullámok lassabban haladnak lineáris rugalmas közegben, mint a kompressziós hullámok.

8.6.2. Ideális folyadék áramlása

Az ideális folyadékban nincs semmilyen nyírófeszültség semmilyen tesztsíkon. Emiatt vízszintes a folyadék felülete nyugalomban és ezért vannak csak kompressziós hullámok folyadékban. Tehát a feszültségállapot gömbszerű, amit egyetlen paraméterrel, a nyomással írhatunk le:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) &= -p(\mathbf{r}, t) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (8.91)$$

Fontos, hogy a nyomás definíciója pont ellentétes a feszültséggel ezért megjelenik egy mínusz előjel.

Számoljuk ki a feszültség-tenzor divergenciáját!

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})_i &= \sum_j \partial_j \sigma_{ij} = - \sum_j \partial_j p(\mathbf{r}, t) \delta_{ij} = -\partial_i p = -(\operatorname{grad}p)_i \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} &= -\operatorname{grad}p \end{aligned} \quad (8.92)$$

Írjuk fel az ideális folyadék Euler-egyenletét (8.75):

$$\begin{aligned} \rho \left(\partial_t v_i + \sum_j v_j \partial_j v_i \right) &= -\partial_i p + f_i \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} (\operatorname{grad}p + \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (8.93)$$

8.6.3. Newtoni-folyadék áramlása

A reális folyadékokban valóban nincs nyírófeszültség, de csak nyugalomban, amikor áramlik, akkor fellép sűrűlódás. Itt azt az esetet vizsgáljuk, amikor a dinamikus feszültség arányos a nyírás rátával. Tehát a feszültséget felbontjuk egy statikus és egy dinamikus részre:

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{-p \mathbf{1}}_{\text{statikus}} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}'}_{\text{dinamikus}} \quad (8.94)$$

A Newtoni-folyadék definíciója, hogy a $\boldsymbol{\sigma}'(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$ függvény lineáris. Ha az anyag izotrop is, akkor a Hooke-törvény (8.4 fejezet) levezetésével teljesen analóg módon megkaphatjuk, hogy

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu' \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda' \operatorname{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{1}, \quad (8.95)$$

ahol

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad (8.96)$$

Láttuk rugalmas esetenél az (8.83) egyenletben, hogy

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \mu \Delta \mathbf{s} + (\mu + \lambda) \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{s}) \quad (8.97)$$

Most a dinamikus részre azt kapjuk, hogy:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}' = \mu' \Delta \mathbf{v} + (\mu' + \lambda') \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) \quad (8.98)$$

Legyen

$$\eta \equiv \mu' \quad (8.99)$$

a *dinamikai viszkozitás*. Az egészet beírva az (8.75) Euler-féle mozgásegyenletbe kihasználva, hogy a statikus tagnak már ismerjük az egyenletét (8.93):

$$\rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v}] = -\text{grad} p + \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{v} + (\eta + \lambda') \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}) \quad (8.100)$$

Ez a *Navier-Stokes-egyenlet!*

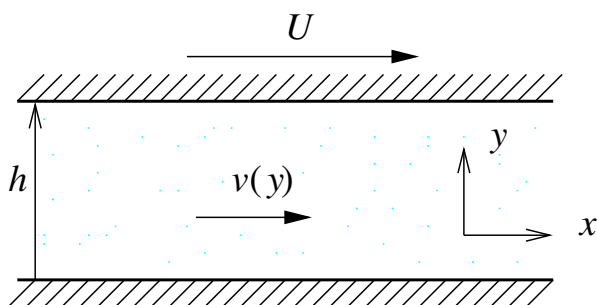
Érdemes még felírni az összenyomhatatlan folyadéokra ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) is a Navier-Stokes-egyenletet:

$$\begin{aligned} \rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v}] &= -\text{grad} p + \mathbf{f} + \eta \Delta \mathbf{v} \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho} (\text{grad} p + \mathbf{f}) + \nu \Delta \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (8.101)$$

ahol $\nu = \eta/\rho$ a kinematikai viszkozitás.

A Navier-Stokes-egyenlet a hidrodinamika alapegyenlete a világ egyik leggyakrabban és legtöbb pénzt felemészítően megoldott egyenlete. Mivel nemlineáris, ezért nagyon nehezen kezelhető, bonyolult geometriákban, 3 dimenzióban nagy erős számításkapacitást igényel. Az alábbiakban néhány egyszerű esetben megoldjuk összenyomhatatlan folyadékra a Navier-Stokes-egyenletet.

8.1. Feladat Planáris Couette áramlás



8.9. ábra. Planáris Couette áramlás. A két y normálisú sík lap között folyadék áramlik. A felső lap U nagyságú x irányú sebességgel mozog, az alsó áll.

A 8.9 ábrán látható elrendezésben a folyadék két y normálisú sík lap között áramlik. A felső lap U nagyságú x irányú sebességgel mozog, az alsó áll. Mivel a rendszer stacionárius, ezért $\partial_t \mathbf{v} = 0$. Nincs külső erő $\mathbf{f} = 0$, nincs nyomásgradiens $\nabla p = 0$. A határfeltételek miatt a sebességnek csak x irányú komponense lehet $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$. Mivel a rendszer x és z irányokban eltolás szimmetrikus ezért a sebesség csak az y koordinátától függhet $v_x(y)$. Tehát a (8.101) egyenlet x komponense a következőképpen alakul

$$\sum_j v_j \partial_j v_x = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (8.102)$$

A bal oldal zérus, hiszen a deriválás csak $j = y$ esetén ad nem nulla tagot, míg v_j $j = x$ esetén. Azaz

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0, \quad (8.103)$$

amiből

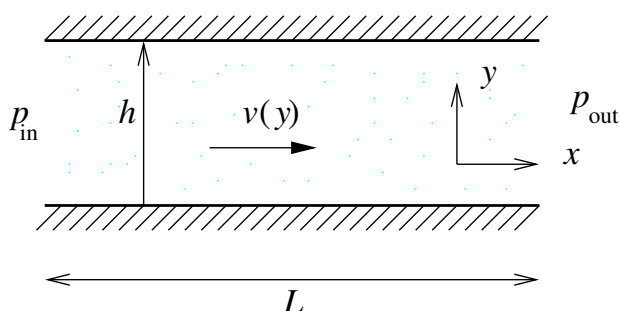
$$v_x = Ay + B \quad (8.104)$$

Ezt kell illeszteni a határfeltételekhez, amiből

$$v_x(y) = U \frac{y}{h}. \quad (8.105)$$

Azaz egy lineáris sebességprofilt kaptunk.

8.2. Feladat Planáris Poiseuille áramlás



8.10. ábra. Planáris Poiseuille áramlás. A két y normálisú álló L hosszú sík lap között folyadék áramlik $\Delta p = p_{\text{out}} - p_{\text{in}}$ nyomás hatására.

Vizsgáljuk meg miként áramlik egy összenyomhatatlan folyadék két álló síklap között nyomás hatására. A nyomásváltozás a L hosszúságú rendszerben $\Delta p = p_{\text{out}} - p_{\text{in}}$. Ekkor $\nabla p = (\Delta p/L, 0, 0)$. A mozgás stacionárius $\partial_t \mathbf{v} = 0$. Hasonlóan az előző feladathoz a sebességnek csak x komponense van, amely csak az y koordinátától függ, tehát $v_x(y)$ -t keressük. Ugyanazon okok miatt a $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$ tag is eltűnik. Tehát a (8.101) egyenlet a következőre redukálódik:

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\Delta p}{L\rho} = 0 \quad (8.106)$$

Ennek az általános megoldása:

$$v_x(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu\rho} y^2 + Ay + B \quad (8.107)$$

Tudjuk, hogy $v_x(y)$ a falaknál zérus értéket vesz fel, tehát:

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\mu\rho} y(h - y) \quad (8.108)$$

Azaz egy parabolikus sebességprofilt kaptunk.

Irodalomjegyzék

- [1] Wikipedia, *Kúpszelet*, <http://hu.wikipedia.org/wiki/Kúpszelet>.
- [2] Wikipedia, *Molecular dynamics*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Molecular_dynamics.
- [3] Wikipedia, *Convolution*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>.
- [4] Wikipedia, *Euler-képlet*, <http://hu.wikipedia.org/wiki/Euler-képlet>.
- [5] Wikipedia, *Tacoma Narrows Bridge (1940)*,
[http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_\(1940\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940)).
- [6] Wikipedia, *Euler angles*, http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles.
- [7] Mike Birse *Stability of free rotation*
<http://www.ph.man.ac.uk/~mikeb/lecture/pc167/rigidbody/stability.html>
- [8] Wikipedia, *Gauss–Osztrogradszkij-tétel*,
<http://hu.wikipedia.org/wiki/Gauss\T1\textendashOsztrogradszkij-tétel>.
- [9] Wikipedia, *Diffusion equation*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_equation.
- [10] Wikipedia, *Wheeler–Feynman absorber theory*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Wheeler\T1\textendashFeynman_absorber_theory.