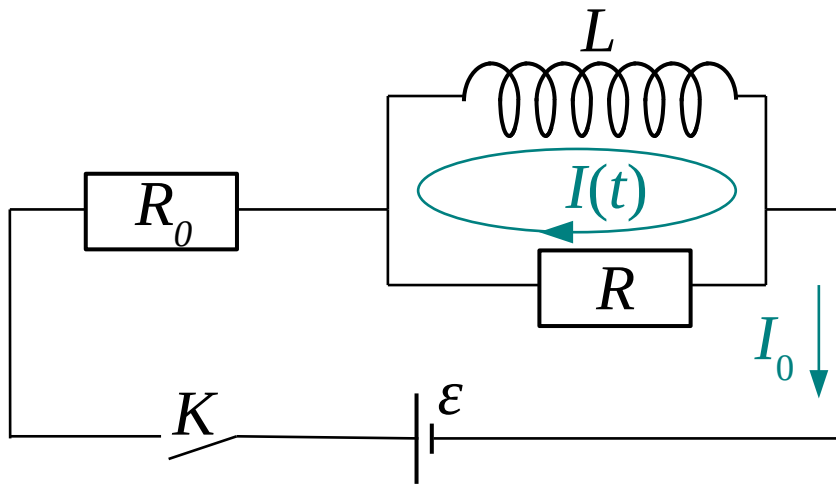


Tekercs energiája

emlékeztető: kikapcsolási jelenség

kikapcsolás után még folyik egy egyre csökkenő áram a tekercsen



$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

- ez az áram munkát (Joule-hő) végez az R ellenálláson
- ehhez valahonnan energia kell
- ez csak a tekercsben tárolódhat
- R -en végzett összes munka = a tekercs energiája kikapcsoláskor

Tekercs energiája 2

$$E_{\text{tekercs}} = W_R = \int_0^{\infty} P_R dt = \int_0^{\infty} R I^2(t) dt = R \int_0^{\infty} \left(I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \right)^2 dt = R I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t} dt =$$

$$= R I_0^2 \left[-\frac{L}{2R} e^{-2\frac{R}{L}t} \right]_0^{\infty} = \cancel{R} I_0^2 \frac{L}{\cancel{2R}} (-0 - (-1)) = \frac{1}{2} L I_0^2$$

V15

tehát ha egy tekercsen I áram folyik, akkor energiája: $E_{\text{tekercs}} = \frac{1}{2} L I^2$

Beugró

Hol tárolódik a tekercs energiája?
A mágneses térében!

Mágneses tér energiája

Emlékeztető: az önindukciós együttható: $L = \frac{\mu n^2 A}{l}$

szolenoid mágneses tere: $H = \frac{nI}{l} \Rightarrow I = \frac{Hl}{n}$

$$E_{\text{mágn}} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu n^2 A}{l} \left(\frac{Hl}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu \cancel{n^2} A}{\cancel{l}} \frac{H^2 \cancel{l^2}}{\cancel{n^2}} = \frac{1}{2} H \underbrace{\mu H}_{=B} \underbrace{Al}_{=V} = \frac{1}{2} HBV$$

Az energiasűrűség: $\rho_{\text{energia, mágn}} = \frac{E_{\text{mágn}}}{V} = \frac{1}{2} HB$

V10

Általában (anizotróp eset):

$$\rho_{\text{energia, mágn}} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Beugró

Ha van elektromos tér is: $\rho_{\text{energia, EM}} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

3.2. Váltakozó áram

Miért fontos?

- A konnektorban harmonikus (cos, sin) váltakozó áram folyik.

Miért nem egyenáram?

- Transzformátor: nagy feszültség, kis veszteség szállításkor; kis feszültség a felhasználóknál.

Miért harmonikus?

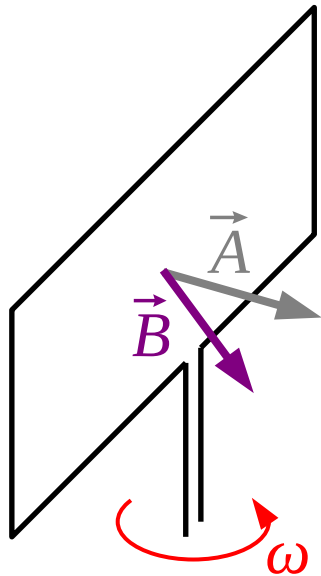
- Könnyű előállítani (forgómozgással).

Harmonikus váltóáram előállítása

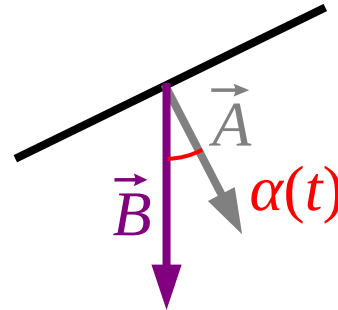
Faraday-féle indukciós törvény: indukált feszültséget hoz létre a mágneses tér fluxusának változása:

- időben változó mágneses tér
- felület változása
 - nagyság (pl. csúszka)
 - irány (pl.: forgómozgás homogén, időben állandó térben)

Harmonikus váltóáram előállítása



metszet:



$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos(\alpha(t)) = BA \cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BA(-\omega \sin(\omega t + \alpha_0)) = BA \omega \sin(\omega t + \alpha_0) = U_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$$

legyen $\alpha_0 = \varphi + \frac{\pi}{2}$, és $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ miatt:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

V15

Kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_II.ogv

Komplex írásmód

Tetszőleges, időben koszinuszosan változó mennyiségre alkalmazható
Szokásos felhasználás:

- váltóáram
- járművek felfüggesztése (rugó, lengéscsillapító)

Motiváció: egyenáram

Egyenáram esetén:

- $U/I=R$, állandó
- soros kapcsolásnál $U_e = U_1 + U_2$ (párhuzamos kapcsolásnál $I_e = I_1 + I_2$)
- ezekből levezethető az eredő ellenállás: $R_e = R_1 + R_2$ ($1/R_e = 1/R_1 + 1/R_2$)

Időben változó $U(t)$, $I(t)$ esetén általános esetben:

- $U(t)/I(t)$ nem állandó, függ az időtől
- $U_e(t) = U_1(t) + U_2(t)$ csak a pillanatnyi értékekre igaz
- Nem lehetne valami hasonlóan egyszerű összefüggést találni?

Váltóáram ellenállásokon

A feszültség: $U(t)=U_0\cos(\omega t)$

Tfh. Ohm-törvény igaz időfüggő esetre is, ekkor $I(t)=I_0\cos(\omega t)$

- $R=U(t)/I(t)=U_0\cos(\omega t)/I_0\cos(\omega t)=U_0/I_0$

Soros kapcsolás: $U_1(t)=U_{1,0}\cos(\omega t)$ és $U_2(t)=U_{2,0}\cos(\omega t)$

- az összegük: $U_e(t)=U_1(t)+U_2(t)=U_{1,0}\cos(\omega t)+U_{2,0}\cos(\omega t)=$
 $=(U_{1,0}+U_{2,0})\cos(\omega t)=U_{e,0}\cos(\omega t)$

- vagyis az **amplitúdók** simán összeadhatóak: $U_{e,0}=U_{1,0}+U_{2,0}$

Tehát az **amplitúdóra** igazak az egyszerű összefüggések:

- hányadosuk állandó ($R=U_0/I_0$)

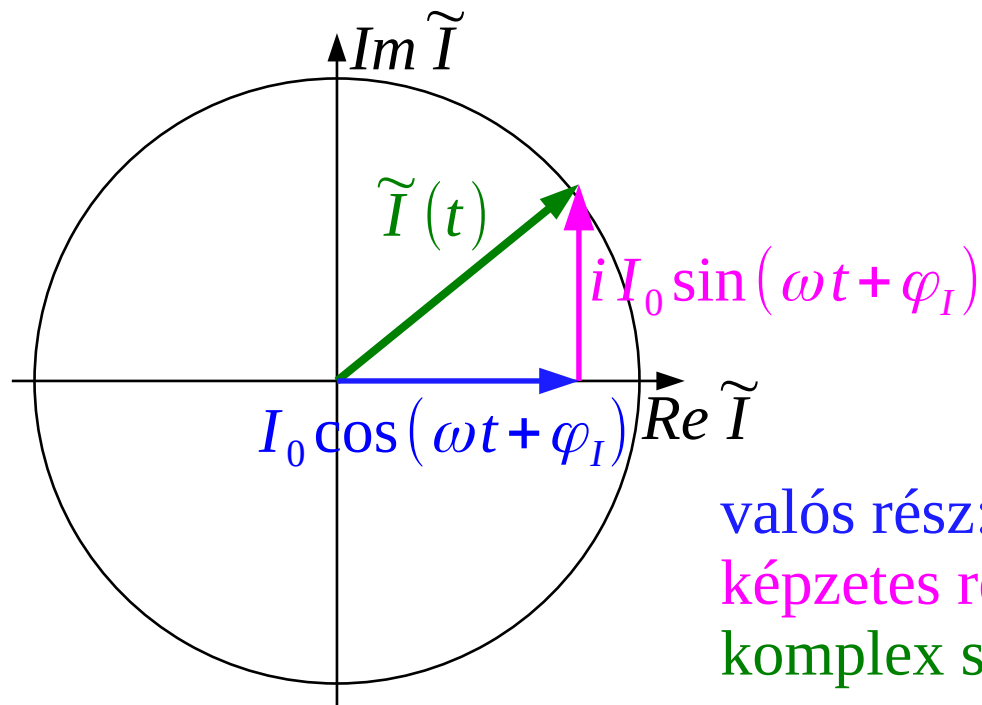
- soros kapcsolásnál egyszerűen összeadhatóak ($U_{e,0}=U_{1,0}+U_{2,0}$)

Ehhez aztán még tartozik egy **közös időbeli változás**: $\cos(\omega t)$

Váltóáram tekercs és kondenzátor esetén

- Nemsokára látni fogjuk: áram és feszültség **fázisa nem ugyanaz**,
 $U(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_U)$ és $I(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi_I)$
 - Két sorba kapcsolt elem feszültségének fázisa is különbözik:
 $U_1(t)=U_{1,0}\cos(\omega t+\varphi_{1,U})$ és $U_2(t)=U_{2,0}\cos(\omega t+\varphi_{2,U})$
- => Nem lehet egyszerűen összeadni az amplitúdókat, osztás is bonyolult, bonyolult trigonometrikus összefüggések :(
- Mechanika emlékeztető: rezgőmozgás a körmozgás vetülete
 - Visszafelé: minden cos változáshoz hozzárendelhető egy körmozgás,
azaz egy **2D forgó vektor** (hossza = amplitúdó)
 - szögsebességük megegyezik (ω ugyanaz)
- => **forgás leválasztható** (megállítható), állandó vektorokat kell összeadni
- És az osztás? Vektorral nem lehet osztani :(
-
- Komplex számok: 2D vektor, amihez osztás is definiálva van.
 - Ráadásul a hányados vektor szöge a fáziskülönbség :)

Komplex írásmód (az áramerősség példáján)



valós rész: mérhető fizikai mennyiség

képzetes rész: hozzá képzeljük

komplex szám: a cos-hoz rendelt forgó vektor

$$\tilde{I}(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) + i I_0 \sin(\omega t + \varphi_I) = I_0 [\cos(\omega t + \varphi_I) + i \sin(\omega t + \varphi_I)] =$$

$$= I_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \underbrace{I_0 e^{i\varphi_I}}_{=\tilde{I}_0} \underbrace{e^{i\omega t}}_{\text{forgás}} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$$

komplex áramerősség: $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$

komplex amplitúdó: $\tilde{I}_0 = I_0 e^{i\varphi_I}$

Beugró

Komplex impedancia

Tehát a komplex áramerősség: $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$, ahol $\tilde{I}_0 = I_0 e^{i\varphi_I}$

hasonlóan a komplex feszültség: $\tilde{U}(t) = \tilde{U}_0 e^{i\omega t}$, ahol $\tilde{U}_0 = U_0 e^{i\varphi_U}$

Hányadosuk: $\frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{I}(t)} = \frac{\tilde{U}_0 e^{i\omega t}}{\tilde{I}_0 e^{i\omega t}} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0} = \frac{U_0}{I_0} e^{i\omega(\varphi_U - \varphi_I)} = \tilde{Z}$ időfüggetlen,
komplex állandó
komplex impedancia

Összegük:

$$\tilde{U}_e(t) = \tilde{U}_1(t) + \tilde{U}_2(t) = \tilde{U}_{1,0} e^{i\omega t} + \tilde{U}_{2,0} e^{i\omega t} = (\tilde{U}_{1,0} + \tilde{U}_{2,0}) e^{i\omega t} = \tilde{U}_{e,0} e^{i\omega t}$$

$\Rightarrow \tilde{U}_{e,0} = \tilde{U}_{1,0} + \tilde{U}_{2,0}$ a komplex amplitúdók összeadódnak

Tehát a **komplex amplitúdóra** igazak az egyszerű összefüggések:

- hányadosuk állandó (ez a komplex impedancia)
- soros kapcsolásnál egyszerűen összeadhatóak

Ehhez aztán még tartozik egy **közös időbeli forgás**: $e^{i\omega t}$

Ellenállás impedanciája

alapösszefüggés az Ohm-törvény: $U(t) = R I(t)$

ha $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$, akkor $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$

$\Rightarrow$ komplex írásmód használható: $\tilde{U}(t) = R \tilde{I}(t)$

$$\tilde{U}_0 e^{i\omega t} = R \tilde{I}_0 e^{i\omega t} \quad / : e^{i\omega t} \neq 0$$

$$\tilde{U}_0 = R \tilde{I}_0$$

$$\tilde{Z}_R = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0} = R$$

Tekercs impedanciája

alapösszefüggés: $U_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt}$

ha $U_L(t) = U_{L,0} \cos(\omega t)$, akkor $I_L(t) = I_{L,0} \sin(\omega t) = I_{L,0} \cos(\omega t - \pi/2)$

$\Rightarrow$ komplex írásmód használható: $\tilde{U}_L(t) = L \frac{d\tilde{I}_L(t)}{dt}$

$$\tilde{U}_{L,0} e^{i\omega t} = L \frac{d}{dt} (\tilde{I}_{L,0} e^{i\omega t}) = i\omega L \tilde{I}_{L,0} e^{i\omega t} \quad /: e^{i\omega t} \neq 0$$

$$\tilde{U}_{L,0} = i\omega L \tilde{I}_{L,0}$$

$$\tilde{Z}_L = \frac{\tilde{U}_{L,0}}{\tilde{I}_{L,0}} = i\omega L$$

A kondenzátor impedanciájával együtt:

V10

Kondenzátor impedanciája

alapösszefüggés: $U_C = \frac{Q_C}{C}$, időfüggő esetben is érvényes: $U_C(t) = \frac{Q_C(t)}{C}$

emlékeztető: $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} I_C(t)$

ha $U_C(t) = U_{C,0} \cos(\omega t)$, akkor $I_C(t) = -I_{C,0} \sin(\omega t) = I_{C,0} \cos(\omega t + \pi/2)$

$\Rightarrow$ komplex írásmód használható: $\frac{d\tilde{U}_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} \tilde{I}_C(t)$

$$\frac{d}{dt}(\tilde{U}_{C,0} e^{i\omega t}) = i\omega \tilde{U}_{C,0} e^{i\omega t} = \frac{1}{C} \tilde{I}_{C,0} e^{i\omega t} \quad /: i\omega e^{i\omega t} \neq 0$$

$$\tilde{U}_{C,0} = \frac{1}{i\omega C} \tilde{I}_{C,0}$$

$$\tilde{Z}_C = \frac{\tilde{U}_{C,0}}{\tilde{I}_{C,0}} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \quad \boxed{\text{V10}}$$

Komplex impedanciák összefoglalva

a **komplex impedancia** definíciója: $\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}$

ohmos **ellenállás**: $\tilde{Z}_R = R$

tekercs: $\tilde{Z}_L = i \omega L$, L a tekercs önindukciós együtthatója

kondenzátor: $\tilde{Z}_C = \frac{1}{i \omega C} = \frac{-i}{\omega C}$, C a kondenzátor kapacitása

Beugró

A Kirchhoff-törvények a komplex amplitúdókra

Kirchhoff csomóponti és huroktörvénye a pillanatnyi áramokra és feszültségekre (U_L -lel) igaz

=> a pillanatnyi komplex értékekre is igaz

csomóponti törvény: $0 = \sum_{k=1}^n \tilde{I}_k(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{I}_{k,0} e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^n \tilde{I}_{k,0} \quad /: e^{i\omega t} \neq 0$

$$\boxed{0 = \sum_{k=1}^n \tilde{I}_{k,0}} \text{ a komplex amplitúdókra}$$

huroktörvény hasonlóan: $\sum_{i=1}^n \tilde{U}_i(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^n \tilde{U}_{i,0} = 0}$

impedanciák kapcsolására belátható:

soros kapcsolat: $\tilde{Z}_{\text{eredő}} = \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i$ párhuzamos kapcsolat: $\frac{1}{\tilde{Z}_{\text{eredő}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{Z}_i}$

Vagyis a komplex amplitúdókkal és impedanciákkal formailag ugyanúgy számolhatunk, mint egyenáramok esetén.

Váltakozóáram teljesítménye

Joule-törvény érvényes időfüggő esetre is: $P(t) = U(t) I(t)$

harmonikus eset $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$, és $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$

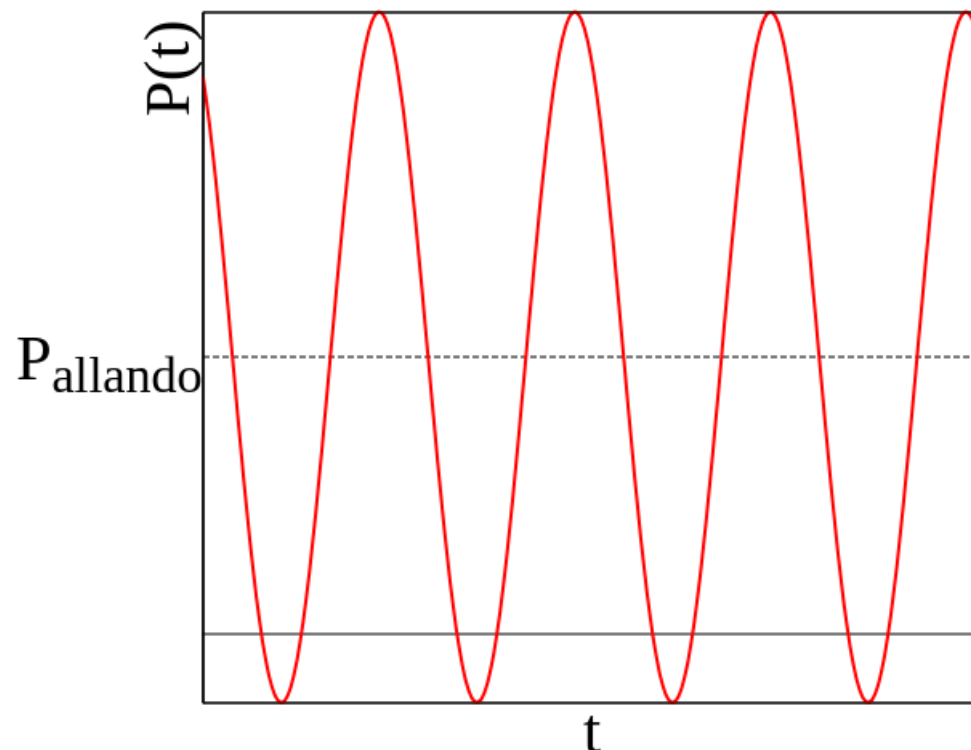
$$P(t) = U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = \dots = \frac{U_0 I_0}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

azaz: $P(t) = P_{\text{állandó}} + P_{\text{változó}}(t)$

$$\text{átlagteljesítmény: } \bar{P} = \frac{\int_0^T P(t) dt}{T}$$

hosszú időre: $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{P} = P_{\text{állandó}}$

$$\boxed{\bar{P} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi}$$



Negatív teljesítmény

ideális tekercs vagy kondenzátor: $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

$P_{\text{állandó}} = 0$, $P_{\text{változó}}$ pozitív és negatív félperiódusok

- $P > 0$: az áram munkát végez, energia az elektromos/mágneses térbe
- $P < 0$: az el./mágn. tér leépül, az energia visszakerül a hálózatba

Ha ellenállás is van:

- azon mindig $P > 0$, Joule-hő
- eredő teljesítményben lehet $P < 0$ szakasz,
ha a térből több energia kerül vissza, mint a Joule-hő

Effektív feszültség és áramerősség

effektív érték: az az egyenfeszültség és egyenáram, amelyek teljesítménye ohmos ellenálláson ugyanannyi, mint a váltóáram teljesítménye

ohmos ellenálláson $\varphi=0$ $\longrightarrow \bar{P} = U_0 I_0 / 2 \longrightarrow \boxed{U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \text{ és } I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$

az effektív értékekkel: $\bar{P} = U_{eff} I_{eff}$

és ezekre igaz: $U_{eff} = |\tilde{Z}| I_{eff}$

Köszönöm a figyelmet!