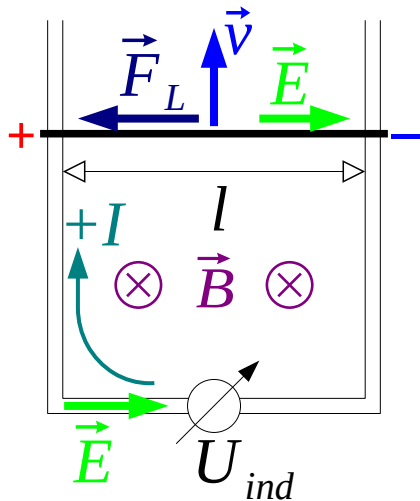


# Neumann-indukció

**elektromágneses indukció:** egy áramkörben mágneses tér hatására indukált feszültség jön létre

- ehhez időben változnia kell vagy az áramkörnek, vagy a mágneses térnek
- például mozgatunk egy vezetőt a mágneses térre merőlegesen, a benne mozgó töltéshordozókra Lorentz-erő hat (idegen erő!)

$$\text{emlékeztető: } \vec{F}_{\text{mágn}} = Q [\vec{v} \times \vec{B}]$$



$$\text{az idegen erő "térerőssége": } \vec{E}_{\text{idegen}} = \frac{\vec{F}_{\text{mágn}}}{Q} = [\vec{v} \times \vec{B}]$$

stacionárius áramoknál  $\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$  miatt:

$$U_{\text{ind}} = \varepsilon = \int_{\text{csúszka, } +}^{-} \vec{E}_{\text{idegen}} \cdot d\vec{r} = \vec{E}_{\text{idegen}} \cdot \vec{\Delta l} = [\vec{v} \times \vec{B}] \cdot \vec{\Delta l}$$

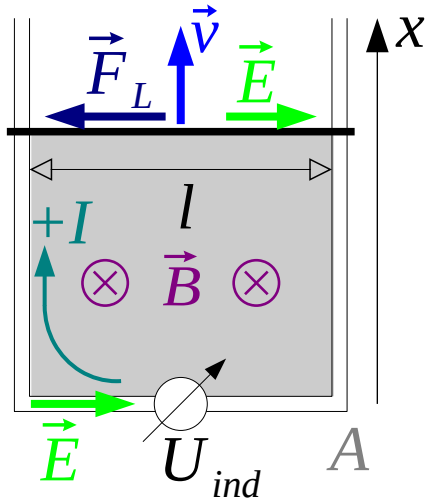
$$\vec{v} \perp \vec{B}; [\vec{v} \times \vec{B}] \text{ és } \vec{\Delta l} \text{ ellentétes irányú} \Rightarrow U_{\text{ind}} = -vBl$$

$$\text{Neumann-törvény: } |U_{\text{ind}}| = vBl$$

Kísérlet: [https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses\\_indukcio\\_I.ogv](https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_I.ogv)

# Mozgási indukció

Neumann-törvény általánosítása



$$U_{ind} = -vBl = -\frac{dx}{dt}Bl = -B\frac{d(xl)}{dt} = -B\frac{dA}{dt}$$

általános esetben: 
$$U_{ind} = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$$

ez a mozgási indukció

emlékeztető:  $\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$  a mágneses tér fluxusa

homogén mágneses térben: 
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{A}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Vajon a **mágneses tér változása** is okoz-e indukált feszültséget?  
Igen, de ez átvezet a kvázistacionárius terekre ...

# 3. Kvázistacionárius terek és váltóáramok

feltételezések:  $\vec{j} \neq 0$ ;  $\dot{\vec{B}} \neq 0$ ;  $\dot{\vec{D}} = 0$

a mágneses tér változása nem elhanyagolható  
alkalmazás: váltóáramok

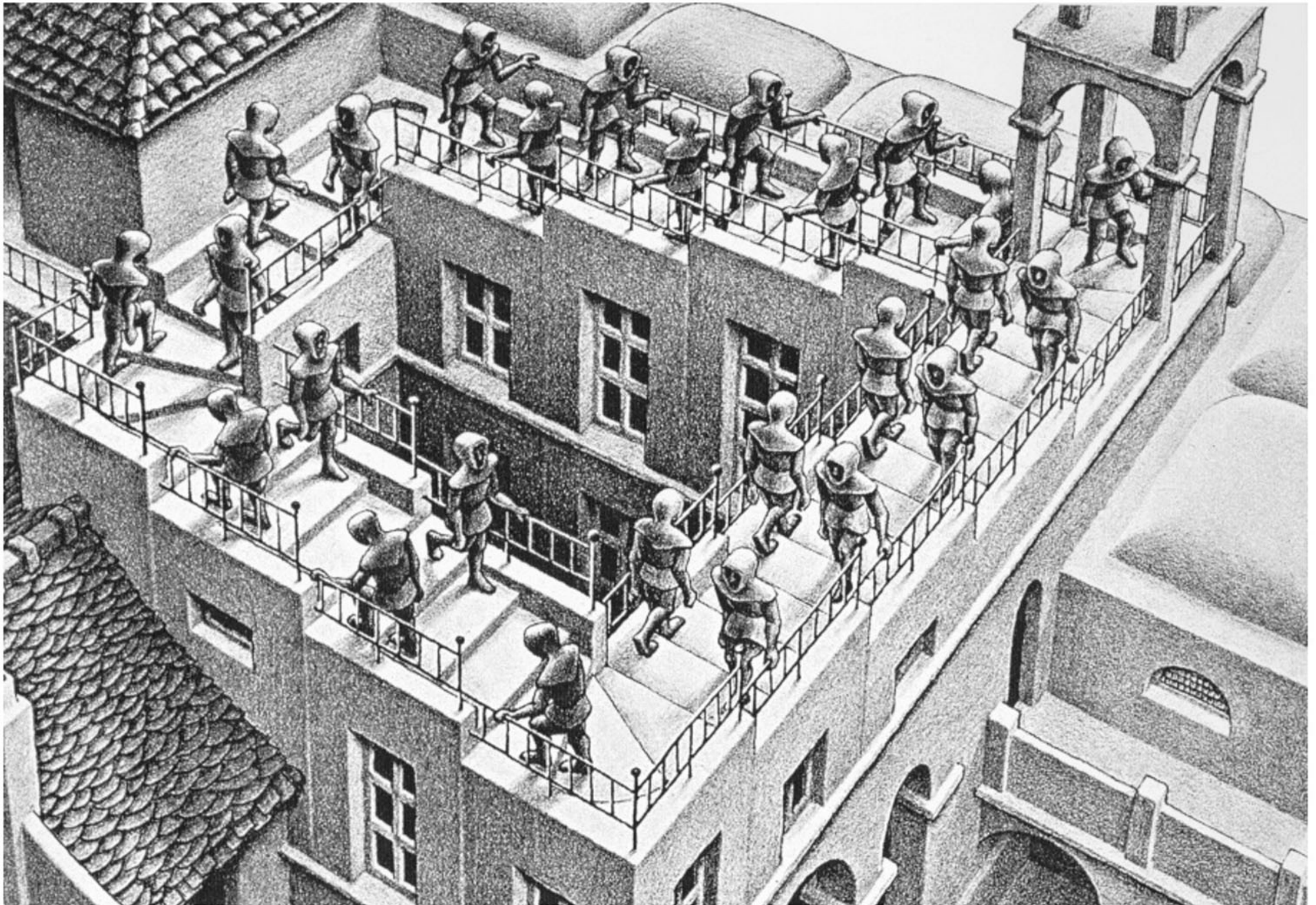
# Miről lesz szó ebben a fejezetben?

- **3.1. Indukció és alkalmazásai**
  - örvényes elektromos tér
  - Lenz-törvény
  - tekercsek kölcsönös- és önindukciója
  - bekapcsolási és kikapcsolási jelenségek tekercsekkel
  - tekercs és mágneses tér energiája
- **3.2. Váltakozó áram**
  - előállítása
  - leírása komplex mennyiségekkel
  - komplex impedancia
  - váltóáram teljesítménye

# Örvényes elektromos tér

- Ampère, Oersted: az elektromos áram örvényes mágneses teret kelt
  - keresték a fordított hatást, de erős mágnesekkel se találták
  - Faraday, 1832: mágneses tér **változása** örvényes elektromos teret kelt
- 
- áramkörben folyik az áram, az idegen erő miatt
  - de nem örvényes az elektromos tér, mert van, ahol szembe mutat
  - analógia: víz lefelé folyik, körbeér, szivattyú
- 
- örvényes elektromos tér: idegen erő nélkül tud körbe folyni az áram
  - analógia: víz mindig lefelé folyik, mégis ugyanoda ér vissza!

# Maurits Cornelis Escher képe



# Maxwell-Faraday-egyenlet

örvényes tér jellemzésére örvényerősség (cirkuláció):  $O(\vec{E}) = \oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Ezt szokták  $U_{ind}$  indukált feszültségnek is nevezni  
de az elektromos tér nem konzervatív! (nincs potenciál)

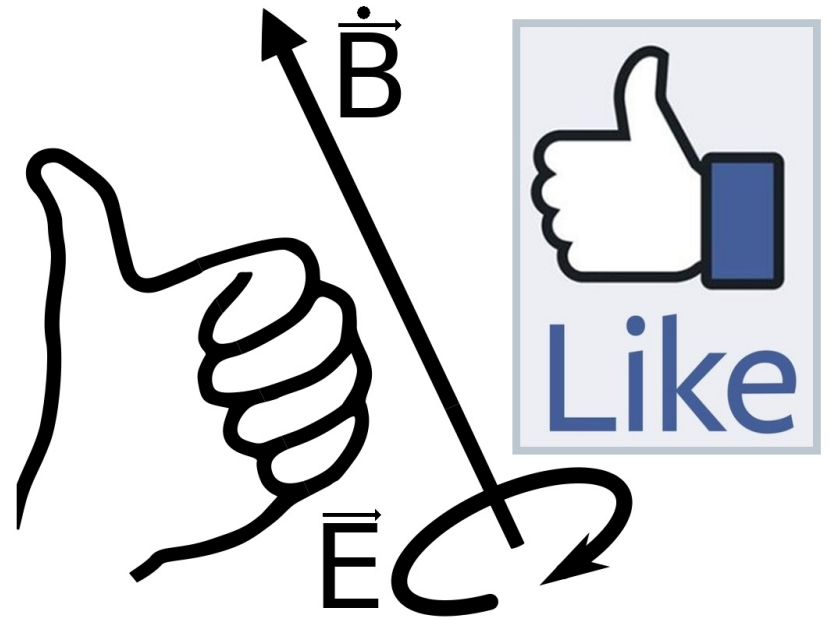
$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A} \quad \text{a globális (integrális) alak}$$

**rot**  $\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$  a lokális (differenciális) alak

– előjel: balkéz-szabály

$\vec{B}$  és  $\dot{\vec{B}}$  adott időpontban függetlenek

Örvényes elektromos tér akkor is van,  
ha nincs műszer vagy vezető



Kísérlet: [https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses\\_indukcio\\_VI.ogv](https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_VI.ogv)

# Faraday-féle indukciós törvény

időben változó mágneses tér

=> örvényes elektromos tér

=> oda helyezett vezetőben indukált áram, feszültség

ez a **nyugalmi indukció**:

$$U_{ind} = \oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A}$$

összevonva a mozgási indukcióval:

$$U_{ind} = - \dot{\Phi}_B = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Beugró

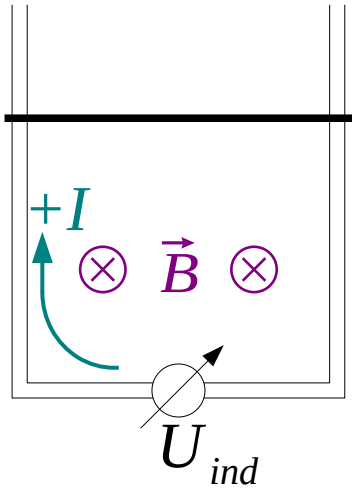
ez a **Faraday-féle indukciós törvény**

$$U_{ind} = - \left( \int_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A} + \text{felület változásából adódó tag} \right)$$

$$\text{belátható: } U_{ind} = - \int_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A} + \int_G [\vec{v} \times \vec{B}] \cdot d\vec{r}$$

$$\text{illetve: } U_{ind} = \oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} + \varepsilon$$

# Faraday-féle indukciós törvény



Tehát a mozgási és nyugalmi indukció együtt.

Közös:  $U_{ind}$ , ami **mérhető**

Különbségek:

mozgási indukciónál Lorentz-erő, mint **idegen erő**,  
konzervatív elektromos tér

nyugalmi indukciónál nincs idegen erő

**örvényes elektromos tér**, nem konzervatív

# Lenz-törvény

időben változó mágneses tér

=> örvényes elektromos tér

=> oda helyezett vezetőben indukált áram, feszültség

=> az indukált áram mágneses teret kelt

**Lenz**, 1834: Az indukált áram mindig olyan irányú,  
hogy mágneses tere az indukciót létrehozó változást csökkentse.

Beugró

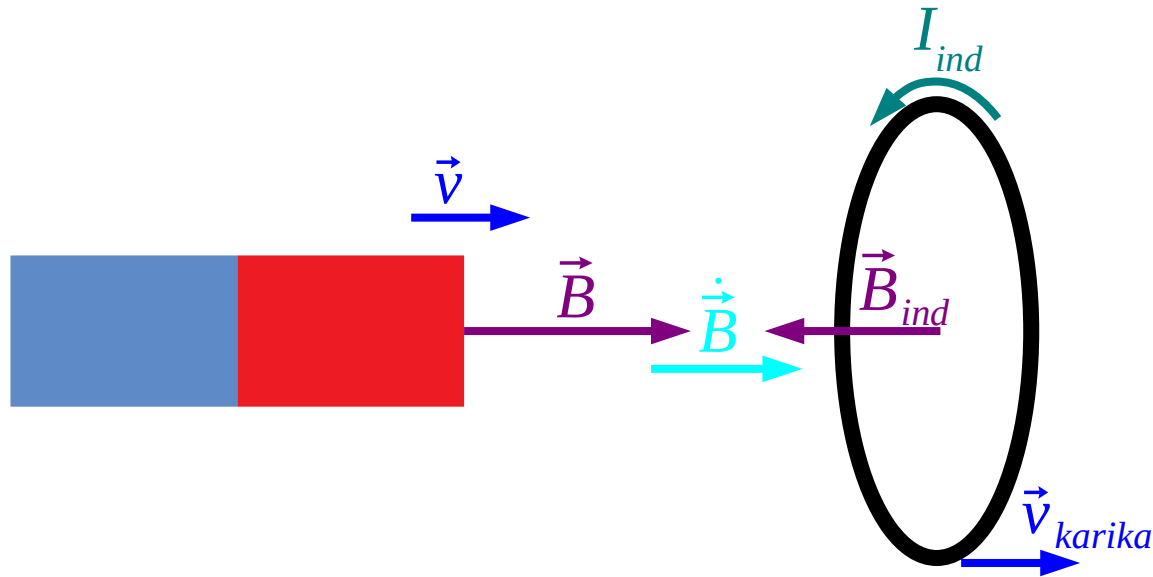
oka: energiamegmaradás (Le Chatelier-Braun-elv)

matematikailag a – előjelben jelenik meg

Kísérlet karikákkal:

[https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses\\_indukcio\\_VIII.ogv](https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_VIII.ogv)

# Karikás kísérlet magyarázata



mágnes közeledik

$\Rightarrow \vec{B}$  nő,  $\dot{\vec{B}} > 0$

$\Rightarrow$  örvényáram (balkéz-szabály)

$\Rightarrow$  indukált mágneses tér (jobbkez-szabály)

$\Rightarrow$  ellentétes az eredeti térrel

$\Rightarrow$  taszítás

# További kísérletek a Lenz-törvényre

mágnes rézcsőben:

[https://www.youtube.com/watch?v=b\\_ujQiEyT\\_Q](https://www.youtube.com/watch?v=b_ujQiEyT_Q)

Waltenhofen-inga:

[https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses\\_indukcio\\_X.ogv](https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_X.ogv)

mágnes + réztömb:

<https://www.youtube.com/watch?v=HqHQBg3tWYo>

# Időben változó áram járta tekercs

## Kölcsönös indukció

egy tekercsben változik az áram,  $I_1(t)$

=> változik a mágneses tere,  $B_1(t)$  ( $B_1 \sim I_1$ )

=> változik a fluxusa egy közelben levő másik tekercsen,  $\Phi_{B,2}(t)$

$$(\Phi_{B,2} \sim B_1 \sim I_1)$$

=> a másik tekercsben feszültség indukálódik,  $U_{ind,2}(t)$

**kölcsönös induktivitás def.:**

$$L_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi_{B,2}}{I_1}$$

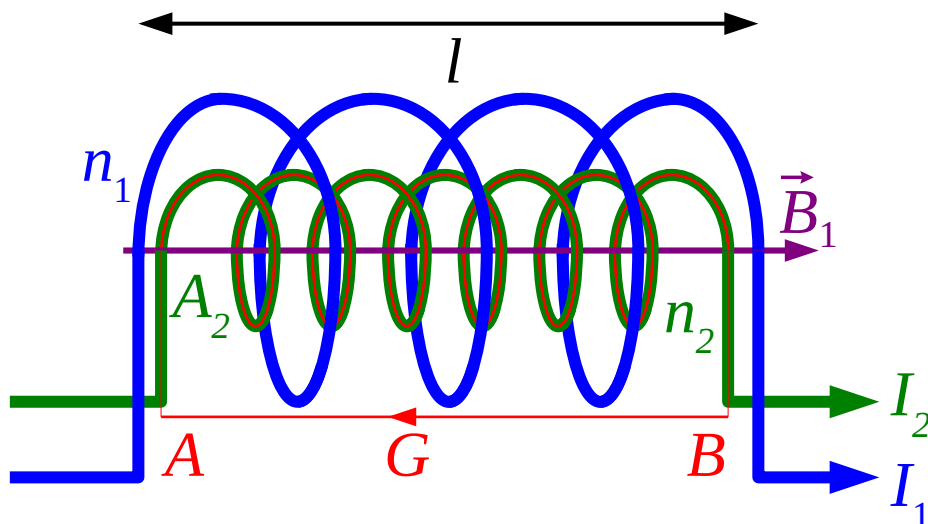
Beugró

mértékegysége: Henry,  $1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Tm}^2}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$

belátható:  $L_{12} = L_{21}$

# Kölcsönös indukciós együttható

Egyszerű eset: két egyenes tekercs egymásban, párhuzamosan



emlékeztető:  $H_1 = \frac{n_1 I_1}{l_1}$

tfh. LIH anyag,  $B_1 = \mu H_1 = \mu \frac{n_1 I_1}{l_1}$

$$\Phi_B(1 \text{ menet}) = \int_{1 \text{ menet}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2 = B_1 A_2$$

$$\Phi_B(n_2 \text{ menet}) = n_2 B_1 A_2 = n_2 \mu \frac{n_1 I_1}{l_1} A_2 = \underbrace{\frac{\mu n_1 n_2 A_2}{l_1}}_{=L_{21}} I_1 = L_{21} I_1$$

a kölcsönös indukciós együttható: 
$$L_{21} = \frac{\mu n_1 n_2 A_2}{l_1}$$

az indukált feszültség:  $G$ -re  $U_{ind} = -\dot{\Phi}_B(n_2 \text{ menet}) \Rightarrow U_{ind} = -L_{21} \dot{I}_1$

Kísérlet: [https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses\\_indukcio\\_VII.ogv](https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_VII.ogv)

# Önindukció

egy tekercsben változik az áram,  $I_1(t)$

=> önmagára vett fluxusa is változik,  $\Phi_B(t)$  (és  $\Phi_B \sim I_1$ )

=> a saját drótjában is van indukált feszültség

**önindukciós együttható:**  $L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi_B}{I}$

Beugró

az indukált feszültség:  $U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$

önindukciós együttható a kölcsönös indukciós együtthatóból számolható,  
 $n_1 = n_2 = n$ ,  $A_1 = A_2 = A$  helyettesítésekkel:

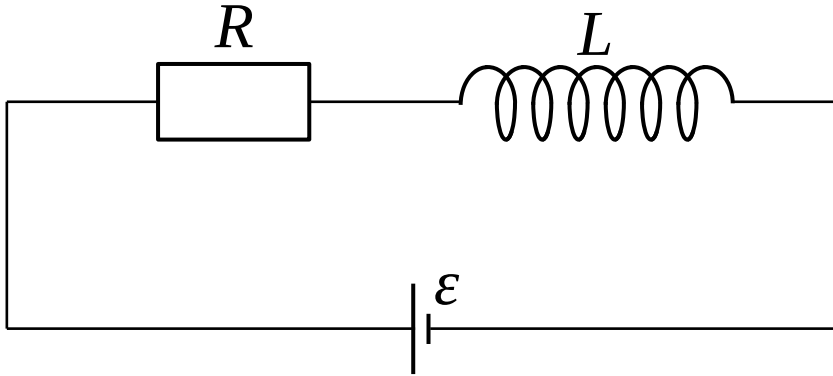
$$L = \frac{\mu n^2 A}{l}$$

V10

a kölcsönös indukciós együttható levezetésével együtt vizsgatétel

# Tekercs áramkörben

egyszerű példa: tekercs + ellenállás + telep



$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\dot{\Phi}_B \neq 0$$

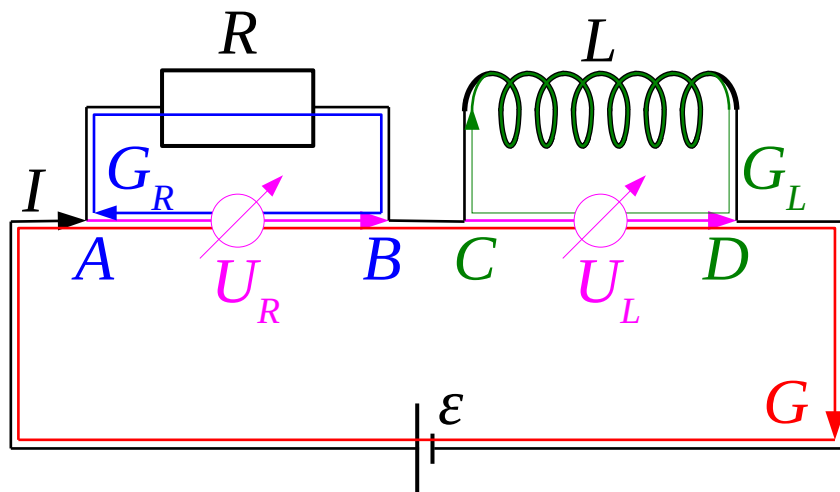
=> Kirchhoff-huroktörvény nem érvényes

ellenállás, telep ugyanúgy kezelhető, mint stacionárius áramoknál

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = RI - \varepsilon = -L\dot{I} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{RI}_{U_R} + \underbrace{L\dot{I}}_{U_L} = \varepsilon$$

$\boxed{U_L = L\dot{I}}$  ezzel formálisan beírható a tekercs a huroktörvénybe

$U_L$  szemléletes jelentése: a tekercsen mérhető feszültség



mágneses tér főleg a tekercs belsejében

$G$  és  $G_R$  görbék által bezárt felületre

$$\Phi_B \approx 0 \text{ és } \dot{\Phi}_B \approx 0$$

$$\oint_{\textcolor{red}{G}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \approx 0 \text{ és } \oint_{\textcolor{blue}{G}_R} \vec{E} \cdot d\vec{r} \approx 0$$

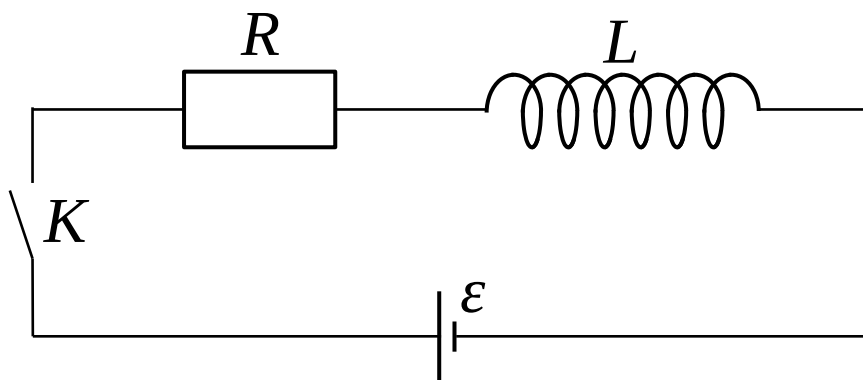
$$0 = \oint_{\textcolor{blue}{G}_R} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} = RI - U_R \Rightarrow U_R = RI$$

$$\oint_{\textcolor{green}{G}_L} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\dot{\Phi}_B = -L \dot{I} = \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_D^C \vec{E} \cdot d\vec{r} \approx \int_{\textcolor{green}{D}}^{\textcolor{green}{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -U_L \Rightarrow U_L = L \dot{I}$$

$$\text{tekercs jó vezető} \Rightarrow E_{\text{tekercs}} = \rho j \text{ kicsi} \Rightarrow \int_{\textcolor{green}{C}}^{\textcolor{green}{D}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \approx 0$$

$$\oint_{\textcolor{red}{G}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \approx 0 \Rightarrow \text{huroktörvény felírható: } U_R + U_L = \varepsilon$$

# Bekapcsolási jelenség



pillanatszerűen áram bekapcsolás  
=> deriváltja,  $U_{ind}$  végtelen lenne!  
=> tekercsen véges idő alatt kapcsol be

hurokegyenlet, mint az előbb:  $U_R + U_L = \varepsilon \Rightarrow RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon$

ez egy differenciálegyenlet, + kezdeti feltétel:  $I(t=0) = 0$

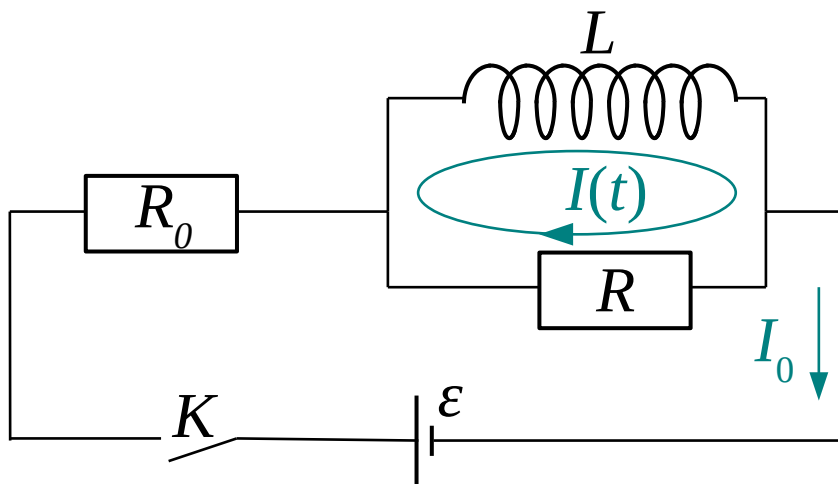
=> megoldása:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Kísérlet: [https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Onindukcio\\_I.ogv](https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Onindukcio_I.ogv)

# Kikapcsolási jelenség

ha 0 idő alatt szakadna meg az áram, végtelen feszültség lenne  
=> kikapcsolás után egy darabig folyik az egyre csökkenő áram



kikapcsolás előtt:  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R_0}$

kikapcsolás után  $R$  és  $L$  körére  
hurokegyenlet:  $U_R + U_L = 0$

azaz  $RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} = 0$

és a kezdeti feltétel:  $I(t=0) = I_0$

$$L \frac{dI}{dt} = -RI \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \quad \Rightarrow \quad \int_{I_0}^I \frac{\tilde{dI}}{\tilde{I}} = -\int_0^t \frac{R}{L} \tilde{dt} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L} t$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

# Kikapcsolási jelenség

a kikapcsolás után mérhető feszültség:  $U = RI = RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} = R \frac{\varepsilon}{R_0} e^{-\frac{R}{L}t}$

pl.: villanykapcsoló lekapcsolása,  $R$  a levegő

$R \gg R_0$

$U$  nagy, szikrázhat

Kísérlet: [https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Onindukcio\\_II.ogv](https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Onindukcio_II.ogv)

**Köszönöm a figyelmet!**