

Elektromos megosztás

kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Megosztas_I.ogv

Elektromos megosztás

- megdörzsölt üvegrúd, töltés van rajta
- elektromos térerősség van körülötte
- vezetőben ennek hatására töltéshordozók elmozdulnak

Meddig mozognak?

- amíg a térük kompenzálja a külső teret

vezetőben, sztatikában $\vec{E} = \vec{0}$

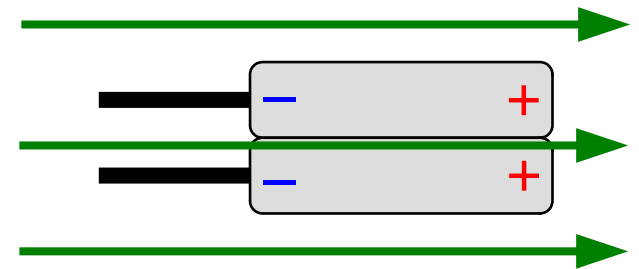
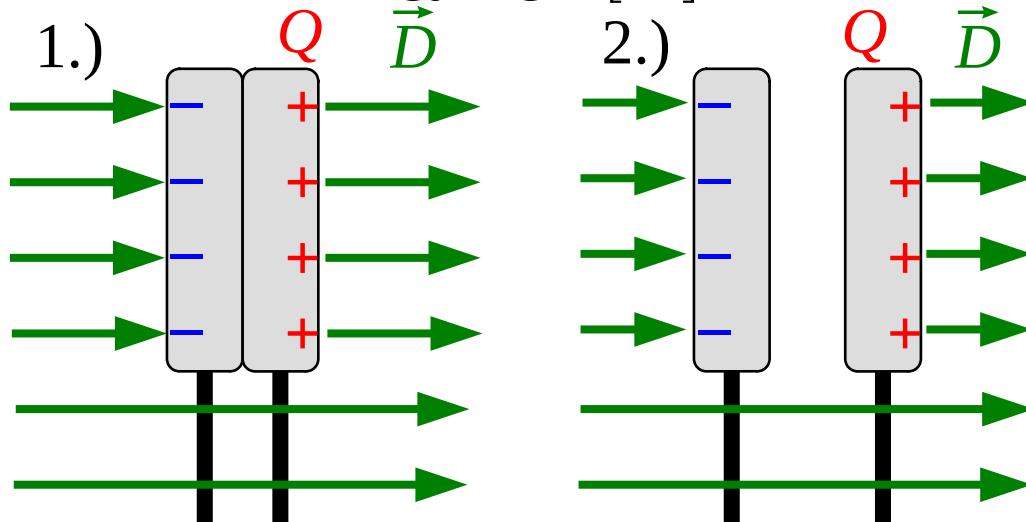
ha $\vec{E} \neq \vec{0} \Rightarrow$ töltéshordozók mozognak $\Rightarrow$ van áram, nem sztatika

megosztás konzerválása: összeköttetés megszakítása

kísérlet: <https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Rejtveny.ogv>

A D-tér (elektromos megosztás) mérése

- „palacsintasütővel”: két, szigetelő nyéllel ellátott sík vezetővel
- eszköz méretére átlagot mér
(olyan kis eszköz, ahol már homogén a tér)
- mérés menete:
 - összeérintve (térre merőlegesen) betenni a térbe (megosztás)
 - térben szétválasztani (konzerválás)
 - térből ki, töltés mérése
 - nagysága: $D = Q_{max}/A$
 - iránya: próbálgatással, amikor Q maximális, merőleges a felületre
 - mértékegysége: $[\vec{D}] = A \cdot s/m^2$



Elektrosztatika 2. alaptörvénye

Elektromos feszültség

Az elektromos tér munkája egységnyi töltésre 2 pont között (osztás Q_p -vel, mérőeszköztől független legyen)

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q_p} = \frac{\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}{Q_p} = \int_A^B \frac{\vec{F}}{Q_p} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

definíció: $U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q_p} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Beugró

mértékegysége: Volt, $[U] = V = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$

- 2 pont között értelmezett
- áramkörben: ez a **kezdőpont feszültsége** a végponthoz képest ($\sim$ potenciál)
- mat.: vonalintegrál (mint a munka) $\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$
- általános esetben a vonalintegrál függ az úttól, nemcsak a végpontoktól

Hogyan függ az úttól az elektromos feszültség?

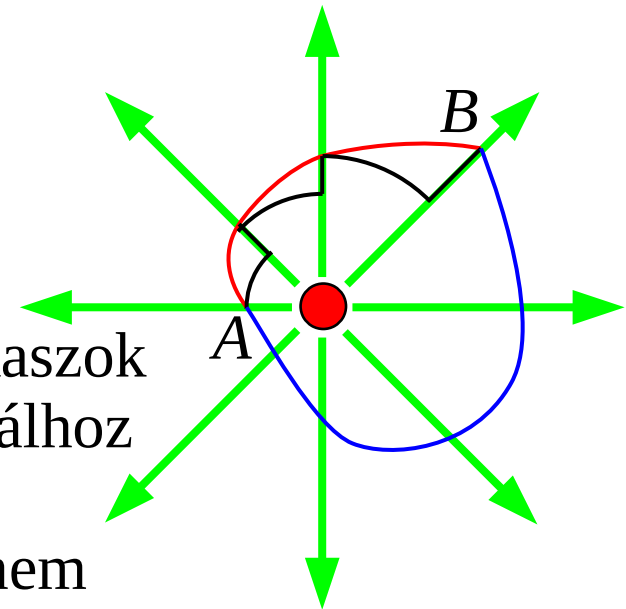
homogén térben: $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \vec{E}_0 \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{E}_0 \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{E}_0 \cdot \Delta \vec{r}$$

azaz nem függ az úttól, csak a végpontoktól

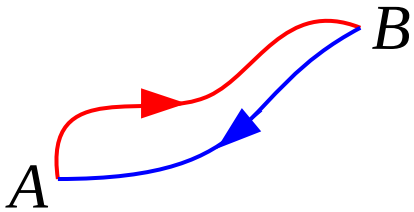
ponttöltés terében: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$

- tér inhomogén, sugárirányú
 - görbe közelítő felbontása: körív, sugárirányú szakaszok
 - köríveken a tér merőleges az útra, 0-t ad az integrálhoz
 - csak a sugárirányú szakaszok adnak járulékot
- => a feszültség csak R_A -tól és R_B -től függ, az úttól nem
- elektrosztatika: minden tér forrása töltés
- => U_{AB} mindig független az úttól



Az elektrosztatika 2. alaptörvénye

Elektrosztatikában a feszültség független az úttól.



$$U_{AB} + U_{BA} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^A \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{másrészt: } \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0} \quad \text{az elektrosztatika 2. alaptörvényének globális alakja}$$

Beugró

Örvényerősség, örvénysűrűség

Ismétlés: örvényerősség: $O_{\vec{v}} = \oint_G \vec{v} \cdot d\vec{r}$, és örvénysűrűség: $\vec{\rho}_{O, \vec{v}} = \text{rot } \vec{v}$

rotáció: örvénysűrűség, de vektor

iránya = lokális forgástengely iránya

örvényerősség = örvénysűrűség felületi integrálja (analógia: vízfelszínre):

$$\int_A \vec{\rho}_{O, \vec{v}} \cdot d\vec{A} = O_{\vec{v}}$$

azaz: $\int_A \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint_G \vec{v} \cdot d\vec{r}$ fontos: G görbe az A felület pereme

ez a Stokes-tétel

Elektrosztatika 2. alaptörvénye lokális alakban

globális alakból a Stokes-tétellel kapjuk a lokálisat

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$



tetsz. A-ra igaz

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = 0}$$

az elektrosztatika 2. alaptörvényének lokális alakja

Beugró

Azaz: az elektrosztatikában az elektromos erőter **örvénymentes**.

Másik megfogalmazás: elektrosztatikában az elektromos erőter **konzervatív**.

Mechanika ismétlés

W_{AB} munka csak az úttól függ
 P_0 referenciapont

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} W_{AB} \\ P_0 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow E_{pot}(\vec{r}), \text{ csak a helytől függ}$$

$$W_{AB} = E_{pot}(A) - E_{pot}(B) = -\Delta E_{pot}$$

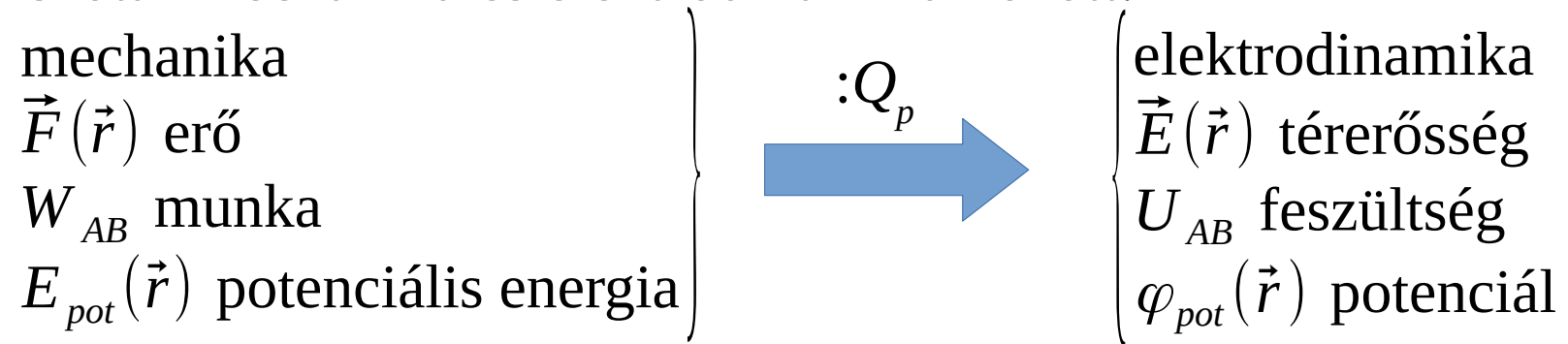
potenciális energia = munkavégző képesség

- mínusz egyszerese az elvégzett munkának
- mint a pénz és a pénzköltő képesség

potenciális energia számolása: $E_{pot}(A) = - \int_{P_0}^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Elektromos potenciál

szótár mechanika és elektrodinamika között:



vagyis a **potenciál**: töltésegységre eső potenciális energia

számolása: $\varphi(\textcolor{blue}{A}) = - \int_{P_0}^{\textcolor{blue}{A}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

feszültség és potenciál kapcsolata: $U_{\textcolor{red}{A}\textcolor{blue}{B}} = \varphi(\textcolor{red}{A}) - \varphi(\textcolor{blue}{B}) = -\Delta \varphi$

Ponttöltés potenciáltere

ismétlés: $\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$, ($\vec{R} = \vec{r}$, mert Q az origóban van)

$$\varphi(A) = - \int_{P_0}^A \vec{E} \cdot \vec{dr} = - \int_{P_0}^A \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{dr} = - \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \int_{P_0}^A \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{dr}$$

$\vec{e}_r \cdot \vec{dr} = dr$, azaz az elemi elmozdulásvektor sugárirányú vetülete, ezzel:

$$\varphi(A) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r_0}^{r_A} \left(-\frac{1}{r^2} \right) dr = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_0 \rightarrow \infty}^{r_A} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r_A}$$

tehát a ponttöltés potenciáltere (végtelen távoli referenciaponthoz képest):

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{r}}$$

V15

sok töltés esetén szuperpozíció: $\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$

potenciáltér előnye: skalártér, nem vektortér (3 helyett 1 komponens)

$\varphi(\vec{r})$: skalártér, szemléltetése szintfelületekkel (ekvipotenciális felületek)

$\vec{E}(\vec{r})$: vektortér, szemléltetése vektorvonalakkal (erővonal)

láttuk: potenciál a térerősség görbementi integrálja

visszafelé: térerősség a potenciál valamilyen hely szerinti deriváltja

mechanika emlékeztető: $\vec{F} = -\mathbf{grad} E_{pot}$

Q_p -vel osztva: $\vec{E} = -\mathbf{grad} \varphi$

Gradiens

skalártér térbeli változását jellemzi

naiv ötlet: $\frac{d\varphi}{d\vec{r}} = \lim_{\vec{\Delta r} \rightarrow \vec{0}} \frac{\Delta\varphi}{\vec{\Delta r}}$

de: vektorral nem lehet osztani!

helyette teljes differenciál: $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$

Descartes koordinátákban:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{grad} \varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \\ \vec{dr} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow d\varphi = \mathbf{grad} \varphi \cdot \vec{dr} = \mathbf{grad} \varphi \cdot \underbrace{\vec{e}_r}_{dr} dr$$

dr már skalár, ezzel osztva az iránymenti derivált: $\frac{d\varphi}{dr} = \mathbf{grad} \varphi \cdot \vec{e}_r$

ez egy skalárszorzat, maximális, ha $\mathbf{grad} \varphi \parallel \vec{e}_r$

tehát a **gradiens** nagysága a **maximális iránymenti derivált**,
a maximális növekedés irányába mutat

Térerősség, mint a potenciál negatív gradiense

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\Delta \varphi = - \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} d\varphi = - \int_A^B \text{grad } \varphi \cdot d\vec{r}$$

azaz: $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (-\text{grad } \varphi) \cdot d\vec{r}$ tetsz. A, B görbére igaz  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$

Megjegyzés:

ekvipotenciális felületen elmozdulva $d\varphi = 0$

akkor $d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\vec{r}$ miatt $\text{grad } \varphi \perp d\vec{r}$

vagyis a gradiens merőleges a szintfelületekre

=> az elektromos térerősség erővonalai merőlegesek
az ekvipotenciális felületekre

Töltés elhelyezkedése vezetőn

láttuk: vezetőben, sztatikában $\vec{E} = \vec{0}$

$\vec{E} = -\mathbf{grad} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{állandó}$ sztatikában a vezetők ekvipotenciálisak

kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Töltések_elhelyezkedése_vezető_felületén

Tehát sztatikában nincs töltés a vezető belsejében, csak a felületén.

- töltést helyezünk a vezető belsejébe
- el. sztat. 1. alaptörv. miatt erővonalak indulnak ki belőle
- elektromos tér lesz a vezető belsejében
- ennek hatására mozognak a töltéshordozók (nem sztatika)
- végső állapot a sztatika lesz, minden töltés kimegy a vezető felületére
- fémes vezetőben ez pikoszekundumok alatt beáll

Elektrosztatika alaptörvényei felületi töltéseloszlásra / peremfeltételek

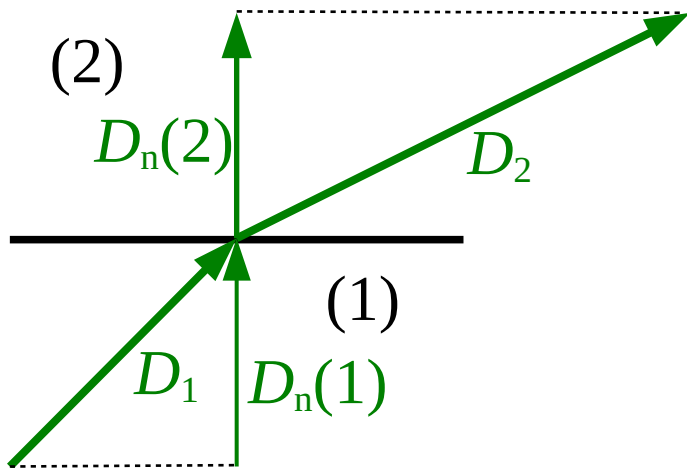
levezetés emelt szinten: https://physics.bme.hu/sites/physics.bme.hu/files/users/BMETE14AX04_kov/eldin4.pdf

emlékeztető: térfogati töltéssűrűség $\rho_Q = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q}{V}$

hasonlóan **felületi töltéssűrűség**, ha csak a felületen van töltés $\sigma = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{Q}{A}$

emlékeztető, 1. alaptörvény lokális alakja: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_Q$

1. alaptörvény felületi töltéseloszlásra / peremfeltétel D-re:



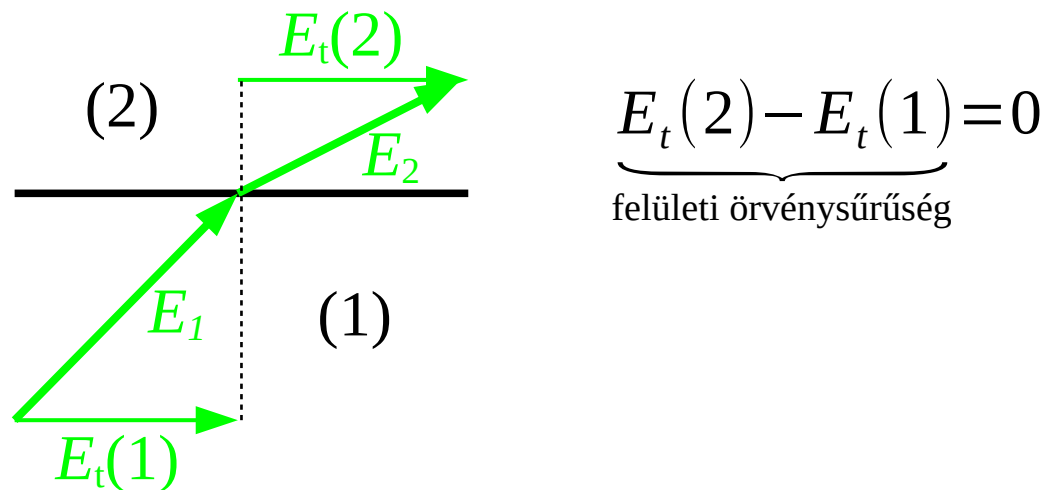
$$\underbrace{D_n(2) - D_n(1)}_{\text{felületi forrassűrűség}} = \sigma$$

Beugró

Elektrosztatika alaptörvényei felületi töltéseloszlásra / peremfeltételek

emlékeztető, 2. alaptörvény lokális alakja: $\text{rot } \vec{E} = 0$

2. alaptörvény felületi töltéseloszlásra / peremfeltétel E-re:



Beugró

Ha (1) közeg vezető, (2) vákuum vagy levegő:

$$\vec{D}(1) = \epsilon_0 \vec{E}(1) = 0, \text{ mert a vezetőben nincs tér}$$

$$\vec{D}(2) = \epsilon_0 \vec{E}(2) = \sigma \vec{n}$$

vagyis a tér merőleges a vezető felületére, ami ekvipotenciális felület

Csúcs hatás

tehát vezető - levegő határfelületén $\vec{D}(2) = \epsilon_0 \vec{E}(2) = \sigma \vec{n}$

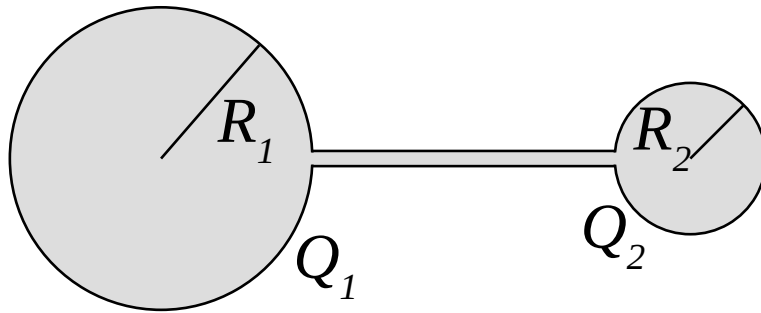
- vezető csúcsain (nagy görbület) a felületi töltéssűrűség (σ) is nagy
- a térerősség is nagy
- akár ionizálhatja a levegő molekuláit
- ionokra erő hat az elektromos térben
- mozognak
- ez az **elektromos szél**

kísérlet:

Segner-kerék: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Elektromos_csucshatas_I.
https://fizipedia.bme.hu/index.php/Elektromos_csucshatas_II.

Csúcshatás levezetése

modell: 2 vezető gömb távol, vékony vezető szállal összekötve
az egész **egyetlen** vezető, sztatikában **ekvipotenciális**



$$\varphi_1 = \varphi_2$$

- tfh. a 2 gömb elég messze van, hogy ne zavarják egymás terét
- gömb potenciálja (gömbön kívül és a felületén):
mintha egy ponttöltés lenne a középpontjában

$$\varphi_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \varphi_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}$$

Csúcshatás levezetése 2

$$\frac{1}{4 \pi \cancel{\epsilon_0}} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4 \pi \cancel{\epsilon_0}} \frac{Q_2}{R_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{1}{4 \pi R_1} \frac{Q_1}{R_1} \cdot R_1 = \frac{1}{4 \pi R_2} \frac{Q_2}{R_2} \cdot R_2$$

$$\underbrace{\frac{Q_1}{4 \pi R_1^2}}_{=\sigma_1} \cdot R_1 = \underbrace{\frac{Q_2}{4 \pi R_2^2}}_{=\sigma_2} \cdot R_2$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{azaz a töltéssűrűség fordítottan arányos a sugárral;}$$

kis sugár (hegyes csúcs) => nagy töltéssűrűség

V10

nagyobb sugár =>

- nagyobb össztöltés
- de kisebb felületi töltéssűrűség

Köszönöm a figyelmet!