

1. Sztatika

feltételezések: $\vec{j}=0$; $\dot{\vec{B}}=0$; $\dot{\vec{D}}=0$

1.2. Elektrosztatika

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

Maxwell-egyenletek

sztatika esetén: $\vec{j}=0$, $\dot{\vec{B}}=0$, $\dot{\vec{D}}=0$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0$$

Elektrosztatika

Magnetosztatika

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV$$

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \int_A \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV$$

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

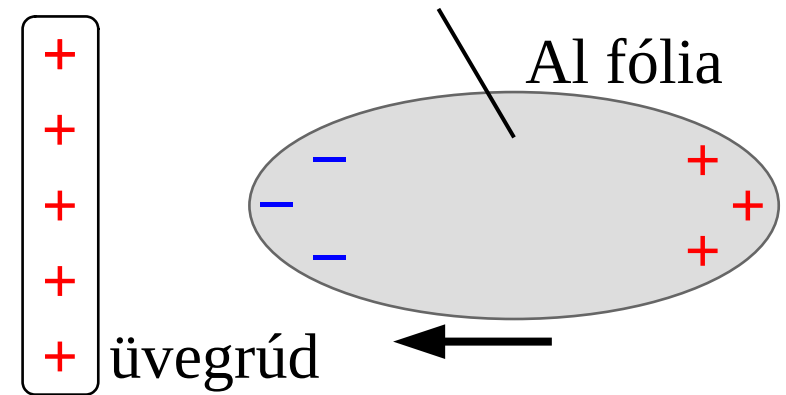
$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$$

Az elektrosztatikus alapjelenség

kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Dorzselektromossag_I.ogv

Vezetővel

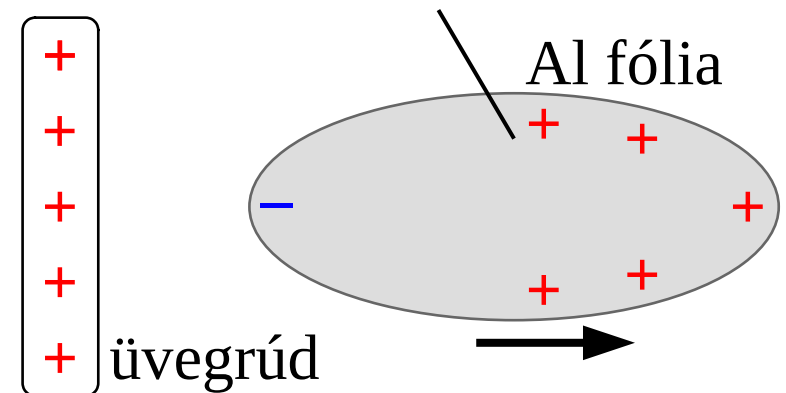


1.) fémlemez odaugrik az üvegrúdhhoz

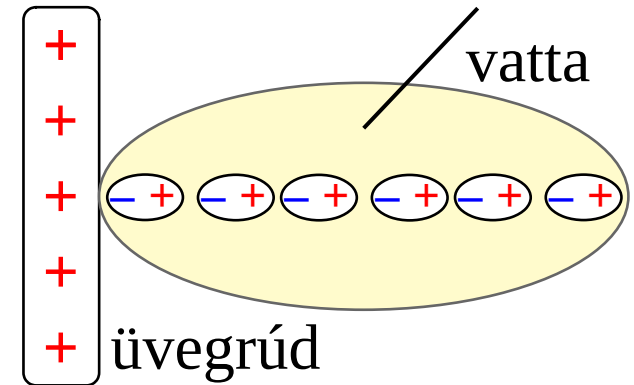
- dörzselektromosság => üvegrúd feltöltődik
- vonzás oka: **elektromos megosztás**
- **vezető**: olyan anyag, amelyben töltéshordozók vannak
- **töltéshordozó**: töltéssel bíró részecske, ami erő hatására könnyen el tud mozdulni
- azonos töltések taszítják, ellentétesek vonzzák egymást
- eredő vonzáshoz kell: üvegrúdtól távolodva csökkenjen a kölcsönhatás erőssége

2.) fémlemez eltaszítódik

- oka: az üvegrúdról töltés adódik át
- azonos töltések taszítják egymást



Szigetelővel



1.) odaugrik, tapad

- tökéletes szigetelő örökké ott maradna
- valóság: lassan egy kis töltés átadódik, elpattan

szigetelőben nincs szabad töltéshordozó, miért ugrik oda?

- **polarizáció**, dipólusok rendeződnek
- pozitív töltések messzebb lesznek, mint a negatívak

Összehasonlítás

- Vezető
 - monopólus
 - külön $+$ és $-$ töltés
 - szét lehet választani
 - elektromos megosztás
- Szigetelő
 - dipólus
 - $+$ és $-$ töltés nem választható szét
 - dipólus rendeződhet
 - polarizáció

Videó: mutatóványok a XVIII. sz-ban

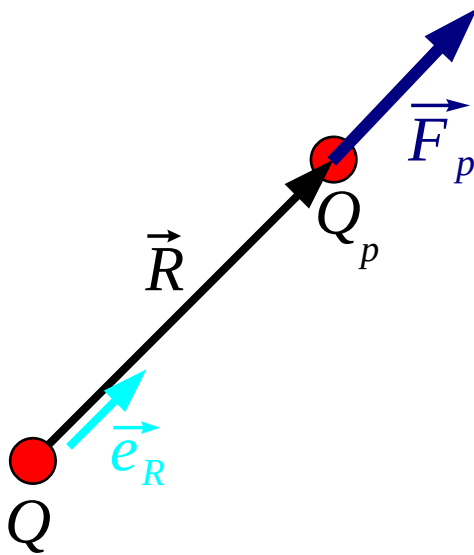
Részletek a BBC „Shock and Awe: The Story of Electricity” c. sorozatának 1. részéből („The Spark”)

Coulomb-mérleg

kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Coulomb_merleg.ogv

Coulomb-törvény

kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Coulomb_merleg.ogg



Q töltés által a Q_p próbatöltésre kifejtett erő:

$$\vec{F}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_p}{R^2} \vec{e}_R$$

Beugró

$\vec{R}$ a Q töltésből a Q_p próbatöltésbe mutató vektor,
és $\vec{e}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ az $\vec{R}$ irányú egységvektor

$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ a **vákuum permittivitása**

megj.: erős kölcsönhatás, két protonra: $\frac{F_{\text{Coulomb}}}{F_{\text{gravitáció}}} = 1,237 \cdot 10^{36} !$

Elektromos térerősség

nemcsak ponttöltésre, hanem általában is

Mérési utasítás:

- vizsgálandó pontba egy ponttöltés, mérjük a rá ható erőt (pl.: rugós erőmérővel)
- aztán a többi érdekes pontban is
- osztunk a próbatöltés nagyságával, hogy a mérőeszköztől független legyen az eredmény

definíció: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_p}{Q_p}$ Beugró mértékegysége: $[\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{As}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$

=> elektromos térbe helyezett **ponttöltésre ható erő:** $\vec{F} = Q \vec{E}$ Beugró

Mekkora legyen Q_p ?

- kicsi, hogy a mérőműszer ne (nagyon) változtassa a mérendőt
- elég nagy, hogy F_p jól mérhető legyen

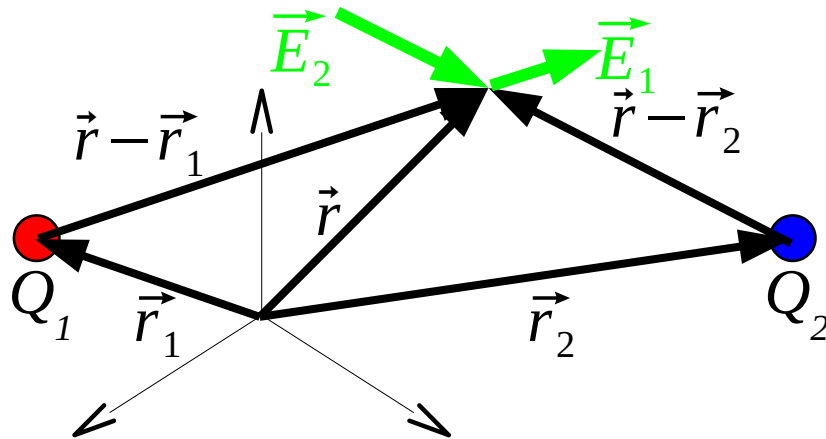
Ponttöltés térerőssége

Coulomb-törvényt beírjuk a térerősség definíciójába:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_p}{Q_p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_p}{R^2} \vec{e}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \vec{e}_R$$

sok töltés esetén szuperpozíció:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



Vektorvonalak

vektorterek ábrázolására

(elektromos) erőter: erővonalak, sebességtér: áramvonalak

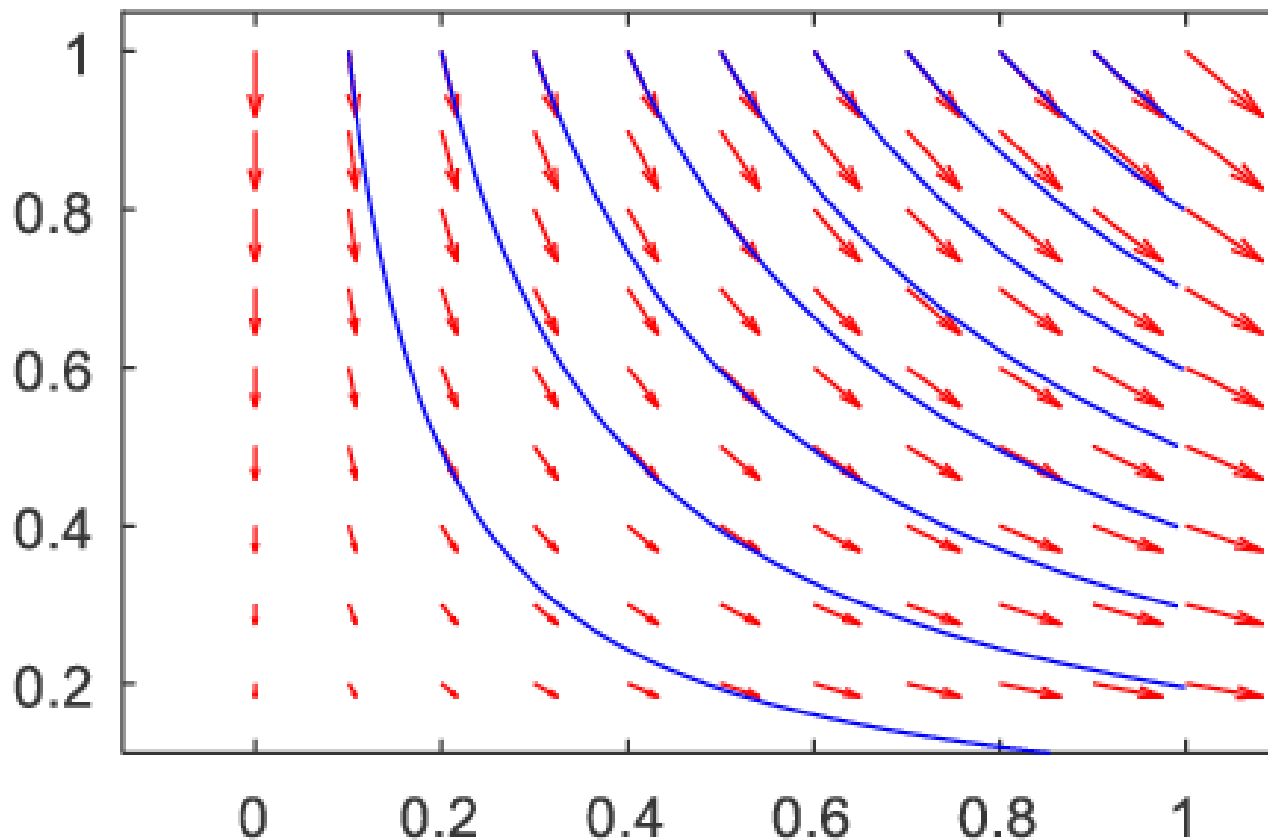
pl.: szélcsatorna



Vektorvonalak

vektorvonal = **irányított görbe**
vektortér

- iránya: vonalhoz húzott (irányított) érintő
- nagysága: vektorvonalak sűrűségéből,
egységnyi felületen hány vonal halad át



Fluxus

vektortér fluxusa egy A felületen: hány vektorvonal halad át rajta (előjeles)

matematikailag: $\Phi_v = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$ felületi integrál

speciálisan $\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ az **elektromos térerősség fluxusa**

Beugró

homogén eset, sík felület: $\Phi_v = \vec{v} \cdot \Delta \vec{A} = |\vec{v}| \cdot \Delta A \cdot \cos \varphi$

pl.: áramló levegő térfogatárama egy ablakkereten át

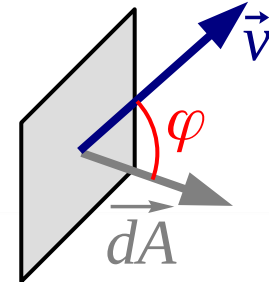
inhomogén eset, görbe felület: kis sík felületekre bontjuk (diszkógömb)

erre összegzünk: $\sum_i \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{A}_i$

határesetben felületi integrál: $\lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{A}_i = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$

$d\vec{A}$ vektor:

- nagysága: felületelem nagysága
- iránya: merőleges a felületre
 - zárt felületnél kifelé
 - peremen körüljárási irány, jobbkéz-szabály



Elektrosztatika 1. alaptörvénye

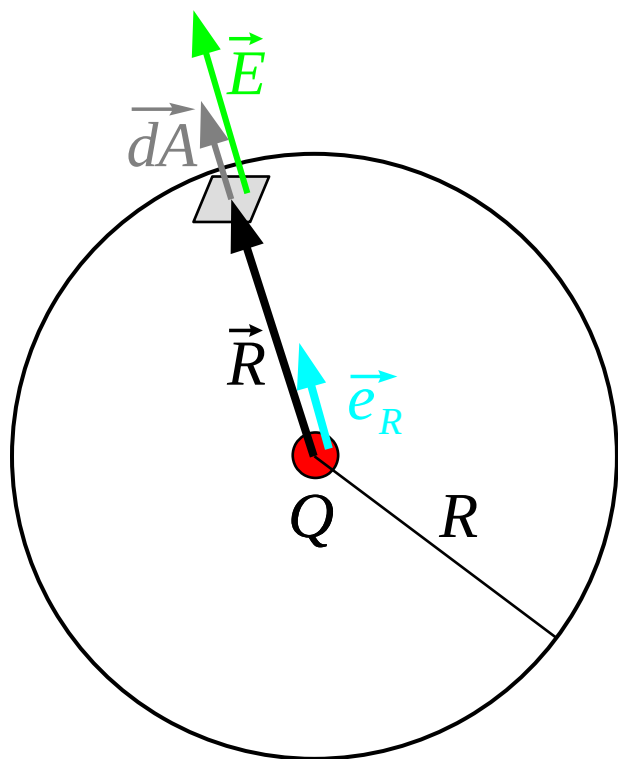
A Q töltésből kiinduló összes erővonal száma egyenlő az elektromos térerősség Q töltést körbevevő zárt felületre számolt fluxusával: $N_Q = \Phi_E$

Elvben erővonal megjelenhetne vagy eltűnhetne a semmiben.

Az 1. alaptörvény azt mondja, hogy az elektromos tér nem ilyen, az erővonalak pozitív töltésből indulnak és negatív töltésben végződnek, azaz az elektromos tér forrása az elektromos töltés.

Levezetés ponttöltésre

Q ponttöltés, A legyen egy R_g sugarú gömb



$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \vec{e}_R \cdot d\vec{A} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_g^2} \oint_A \vec{e}_R \cdot d\vec{A} =$$

$$\vec{e}_R \cdot d\vec{A} = |\vec{e}_R| \cdot |d\vec{A}| \cdot \cos \alpha = 1 \cdot dA \cdot 1 = dA, \text{ mert } \vec{e}_R \parallel d\vec{A}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_g^2} \underbrace{\oint_A dA}_{\text{felület}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_g^2} 4\pi R_g^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

tehát Φ_E nem függ a sugártól, azaz 0 sugarú gömbre (N_Q) is ugyanennyi,

$$\text{tehát } N_Q = \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Coulomb-törvényben $1/r^2 \Leftrightarrow$ erővonal eleje, vége csak töltésben lehet

- ha pl. $1/r^{1,99}$ lenne: erővonalak keletkeznének
- ha pl. $1/r^{2,01}$ lenne: erővonalak eltűnnének

Tetszőleges zárt felületre is belátható:

$$\text{Gauss-törvény: } \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{felírtuk: } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

vákuumban nincs részecske, így dipólus se, emiatt $\vec{P} = \vec{0}$, vagyis $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad \text{elektrosztatika 1. alaptörvénye globális alakban}$$

Beugró

ez lesz Maxwell I.

Forrassűrűség (divergencia)

Ismétlés: forráserősség: $F_{\vec{v}} = \oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$, és forrassűrűség: $\rho_{F, \vec{v}} = \text{div } \vec{v}$

analógia: tömegsűrűség

átlagsűrűség: $\langle \rho_m \rangle = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ egy pontban: $\rho_m = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m}{V}$

hasonlóan a **térfogati töltéssűrűség**: $\rho_Q = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q}{V}$

Beugró

ugyanígy a forrassűrűség: $\rho_{F, \vec{v}} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{F_{\vec{v}}}{V}$

ebből a **divergencia** definíciója: $\text{div } \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$

divergencia Descartes koordinátákban: $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Integrálva

tömegsűrűség / töltéssűrűség térfogati integrálja a tömeg / töltés

$$\text{pl.: } \int_V \rho_Q dV = \int_V dQ = Q$$

ugyanígy a forrassűrűség térfogati integrálja a forráserősség:

$$\int_V \rho_{F, \vec{v}} dV = F_{\vec{v}}$$

$$\text{azaz: } \int_V \text{div } \vec{v} dV = \oint_A \vec{v} \cdot \vec{dA}$$

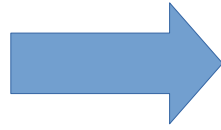
ez a Gauss-Osztrogradszkij-tétel (divergenciatétel)

Elektrosztatika 1. alaptörvénye lokális alakban

globális alakból a Gauss-Osztrogradszkij tétellel kapjuk a lokálisat

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q = \int_V \rho_Q dV$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV$$



$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho_Q dV$$



tetsz. V -re igaz

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho_Q}$$

globális alak

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

A $\vec{D}$ -tér forrása a Q töltés

lokális alak

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_Q$$

A $\vec{D}$ -tér forrássűrűsége a ρ_Q töltéssűrűség

Beugró

Köszönöm a figyelmet!