

9. GYAKORLAT

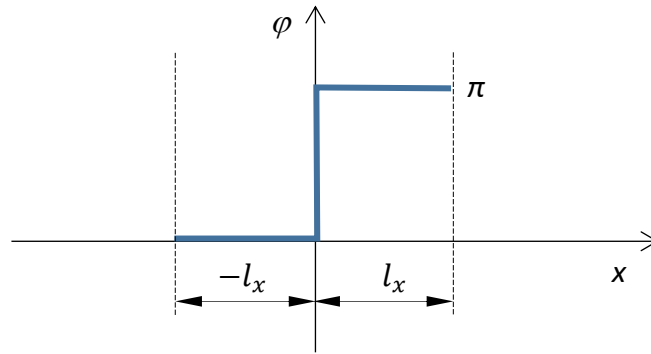
Dr. Erdei Gábor, 2023-11-23

1. Két ellenfázisú rés távolterének meghatározása Fraunhofer-diffrakcióval

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2 + y'^2)}}{i\lambda z'} \iint_{\Sigma} E(x, y) \cdot e^{-i\frac{k}{z'}(x'x + y'y)} dx dy \quad (1)$$

y-irányban az apertúra legyen végtelen (1-dimenziós vizsgálat):

$$E(x') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{kx'^2}{2z'}}}{\sqrt{i\lambda z'}} \int_{\Sigma} E(x) \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx \quad (2)$$



A téramplitudó abszolút értéke egységnyi az l_x szélességű szakaszon, azon kívül zérus.

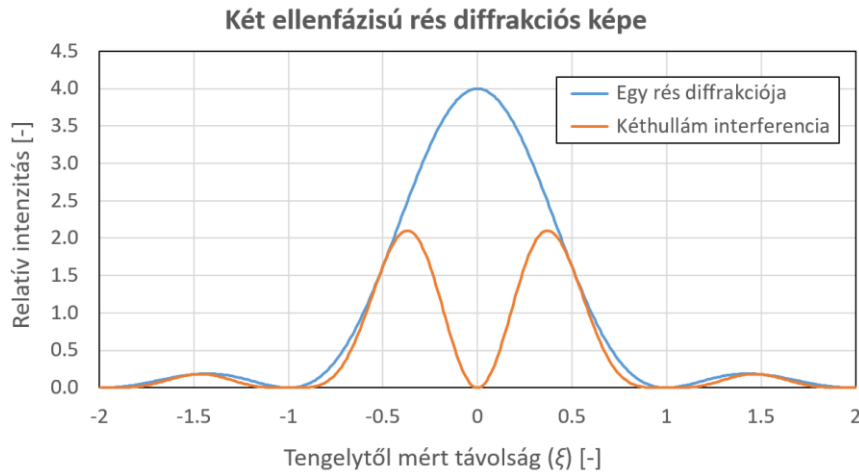
$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} E(x) \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx &= \int_{-l_x}^0 e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx - \int_0^{l_x} e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx = \\ &= -\frac{z'}{ikx'} \left[e^{-i\frac{kx'}{z'}x} \right]_{-l_x}^0 + \frac{z'}{ikx'} \left[e^{-i\frac{kx'}{z'}x} \right]_0^{l_x} = -\frac{z'}{ikx'} \left(2 - e^{i\frac{kx'}{z'}l_x} - e^{-i\frac{kx'}{z'}l_x} \right) = \\ &= -\frac{z'2}{ikx'} \left[1 - \cos\left(\frac{kx'}{z'}l_x\right) \right] = -\frac{z'2}{ikx'} \left[2 \sin^2\left(\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}\right) \right] = i \cdot 2l_x \cdot \text{sinc}\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) \cdot \sin\left(\pi \frac{x'l_x}{\lambda z'}\right), \quad (3) \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy:

$$\cos 2\theta \equiv 1 - 2 \sin^2 \theta. \quad (4)$$

$$I(x') = \frac{v\epsilon}{2} \frac{1}{\lambda z'} \cdot 4l_x^2 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) \cdot \sin^2\left(\pi \frac{x'l_x}{\lambda z'}\right). \quad (5)$$

$$\xi \equiv \frac{x'l_x}{\lambda z'} \quad (6)$$



2. Érdekesség: optical vortex (optikai örvény)



(kép: wikipédia) A nyaláb egy 2π fázisugrást tartalmaz, hasonlóan a csavardiszlokációhoz. Ennek következtében a „hullámfront” csavarvonal alakot ölt, melynek tengelyében fázissingularitás van – itt végig zérus a térerősség. A nyaláb forgatónyomatékot képes kifejteni kis részecskékre. Alkalmazás: pl. csillagászatban exobolygók fényképezése esetén a központi csillag fényének kioltására.

3. Fresnel-diffrakció felhasználása: fókuszált nyaláb téreloszlása

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k(x'^2 + y'^2)}{2z'}}}{i\lambda z'} \iint_{\Sigma} E(x, y) \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x^2 + y^2)} \cdot e^{-i\frac{k}{z'}(x'x + y'y)} dx dy \quad (7)$$

Id. előadásanyag...

Bár ez egy egyszerűsített levezetés volt, a fentiek analógiájára ugyanez a végeredmény némileg bonyolultabban kiadódik a Huygens-Fresnel integrálból is (Id. Optikai tervezés óra). Tehát a közelítés ez utóbbi keretein belül érvényes, azaz ha $NA < 0,5$.

4. Pl. Téglalap-apertúra téreloszlása vékonylencse fókusz síkjában

$\rho = f$ (fókusz távolság), $E(x, y) = E_0$

$$I(x', y') = \frac{v\varepsilon}{2} \frac{E_0^2}{(\lambda f)^2} l_x^2 l_y^2 \text{sinc}^2\left(\frac{x' l_x}{\lambda f}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{y' l_y}{\lambda f}\right) \quad (8)$$

$$x_{\text{Nyquist}} = \frac{\lambda f}{l_x} \quad (9)$$

Ugyanez körapertúra esetén:

$$R_{\text{Airy}} = 1,22 \frac{\lambda f}{D} \quad (10)$$

Pl. $m = 20\times$ nagyítású mikroszkópobjektív: $NA = 0,4$, $f = 9,0$ mm, $\lambda = 550$ nm.

$$\frac{D}{f} = 2 \frac{D/2}{f} = 2 \tan \theta \approx 2 \sin \theta = 2NA \quad (11)$$

$$R_{\text{Airy}} = 1,22 \frac{\lambda}{2NA} = 0,61 \frac{\lambda}{NA} = 0,61 \frac{0,550 \mu\text{m}}{0,4} = 0,84 \mu\text{m} \quad (12)$$

5. Gauss-nyaláb téreloszlása egy lencse fókusz síkjában (kiegészítő anyag)

$\rho = f$ (fókusz távolság). Feltesszük, hogy a lencse jóval távolabb helyezkedik el a fókuszfolttól mint a Rayleigh-range ($f \gg Z_R$), azaz a kilépő gömbhullám középpontja valóban a nyalábderekekben van. Feltesszük továbbá, hogy a lencse apertúrája jóval nagyobb mint a Gauss-nyaláb $1/e^2$ -ed sugara (w). Ekkor az integrálást mínusz végtelentől plusz végtelenig végezhetjük.

$$E(x, y) \equiv e^{-\frac{r^2}{w^2}} = e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} \quad (13)$$

$$E(x', y') = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(x'^2+y'^2)}}{i \cdot \lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} \cdot e^{-i\frac{k}{f}(x'x+y'y)} dx dy \quad (14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{w^2}} \cdot e^{-i\frac{kx'}{f}x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{w^2}} \cdot \left(\cos\left(-\frac{kx'}{f}x\right) + i \sin\left(-\frac{kx'}{f}x\right) \right) dx \quad (15)$$

A második tag antiszimmetrikus, ezért az integrálja nulla. Az első tagé zárt alakban felírható (ld. Abramowitz and Stegun (1972, p. 302, equation 7.4.6)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{w^2}} \cdot \cos\left(\frac{kx'}{f}x\right) dx = \sqrt{\pi w^2} \cdot e^{-\pi^2 w^2 \left(\frac{x'}{\lambda f}\right)^2} \quad (16)$$

Ami szintén Gauss-függvény. Az intenzitás:

$$I(x', y') = \left(\frac{\sqrt{\pi w^2}}{\lambda f}\right)^2 \cdot e^{-2\pi^2 w^2 \left(\frac{x'}{\lambda f}\right)^2} \cdot e^{-2\pi^2 w^2 \left(\frac{y'}{\lambda f}\right)^2} = \frac{\pi w^2}{(\lambda f)^2} \cdot e^{-2\pi^2 w^2 \left(\frac{r'}{\lambda f}\right)^2} \quad (17)$$

$$I(r') = \frac{\pi w^2}{(\lambda f)^2} \cdot e^{-2\left(\frac{r'}{\frac{\lambda f}{\pi w}}\right)^2} \quad (18)$$

Vagyis a fókuszban a nyaláb $1/e^2$ -ed sugara (w_0 , hiszen itt van a nyaláb dereka):

$$w_0 = \frac{\lambda f}{\pi w} = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda f}{2w} = 0,637 \frac{\lambda f}{2w}. \quad (19)$$

Mind (18) és (19) tökéletes összhangban van a Gauss-nyaláb távolférfi téreloszlásáról tanultakkal (ld. 2. gyakorlat), azzal a helyettesítéssel, hogy $z \rightarrow f$.