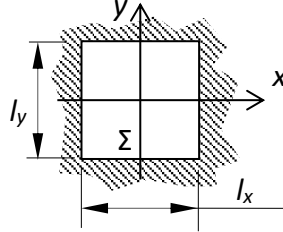


8. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2023-11-09

1. Téglalapapertúra távoltéri fényeloszlásának meghatározása Fraunhofer-diffrakcióval



$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)}}{i \cdot \lambda z'} \iint_{\Sigma} E(x, y) \cdot e^{-i\frac{k}{z'}(x'x+y'y)} dx dy \quad (1)$$

$$E(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) ; E_0 \equiv 1 ; \text{rect}(a) \equiv \begin{cases} 1 & \text{ha } |a| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ha } |a| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)}}{i \cdot \lambda z'} \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x+y'y)} dx dy \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} dx &= \left[-\frac{z'}{ikx'} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} \right]_{-l_x/2}^{l_x/2} = -\frac{z'}{ikx'} \left[e^{-i\frac{k}{z'}(x' \frac{l_x}{2})} - e^{+i\frac{k}{z'}(x' \frac{l_x}{2})} \right] = \\ &= -\frac{z'}{ikx'} \left[-2i \sin \frac{k}{z'} \left(x' \frac{l_x}{2} \right) \right] = \frac{2z'}{kx'} \left[\sin \frac{kx'}{2z'} l_x \right] = \frac{l_x}{l_x} \frac{\lambda z'}{\pi x'} \left[\sin \frac{\pi x' l_x}{\lambda z'} \right] = l_x \text{sinc} \left(\frac{x' l_x}{\lambda z'} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{sinc}(\xi) \equiv \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} ; \xi \equiv \frac{x' l_x}{\lambda z'} \quad (5)$$

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)}}{i \cdot \lambda z'} l_x l_y \text{sinc} \left(\frac{x' l_x}{\lambda z'} \right) \text{sinc} \left(\frac{y' l_y}{\lambda z'} \right) \quad (6)$$

$$I(x', y') = \frac{v \varepsilon}{2} \frac{1}{(\lambda z')^2} l_x^2 l_y^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{x' l_x}{\lambda z'} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{y' l_y}{\lambda z'} \right) \quad (7)$$

Hol a minimumhely?

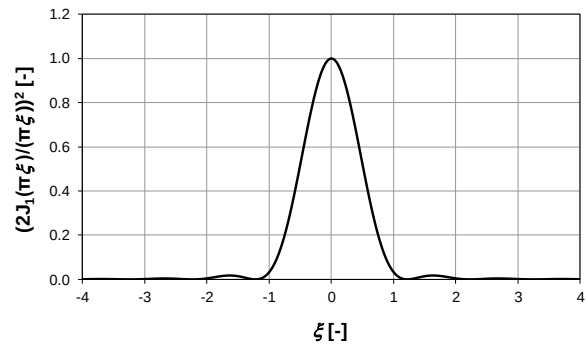
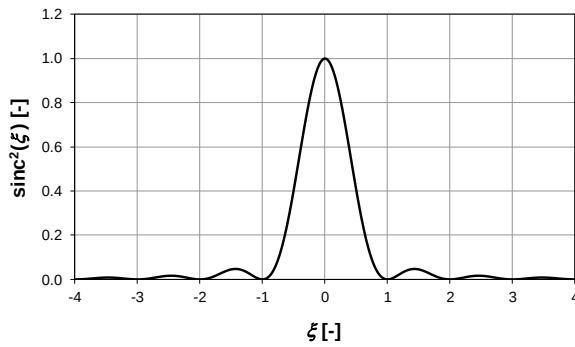
$$\pi \frac{x' l_x}{\lambda z'} = \pi \rightarrow \frac{x' l_x}{\lambda z'} = 1 \quad (8)$$

Nyquist-apertúra:

$$x_{\text{Nyquist}} \equiv x' = \frac{\lambda z'}{l_x} \quad (9)$$

Körapertúránál (Airy-rádusz):

$$R_{\text{Airy}} \equiv r' = 1,22 \frac{\lambda z'}{D} ; \xi \equiv \frac{r' D}{\lambda z'} \quad (10)$$



Pl. A projektorokban található térbeli fénymodulátor (Spatial Light Modulator – SLM) egy pixele ($l_x = 7,6 \mu\text{m}$) mekkora területen világítja ki a vetítő objektívlencsét ($f = 30 \text{ mm}$), ha $\lambda = 550 \text{ nm}$? A lensét ideálisnak tekintjük, és kb. fókusztávolságnyira az SLM-től.

$$x_{\text{Nyquist}} = \frac{\lambda z'}{l_x} = \frac{0,550 \cdot 30}{7,6} = 2,17 \text{ mm} \quad (11)$$

2. Távcső felbontóképessége, ld. előadásanyag

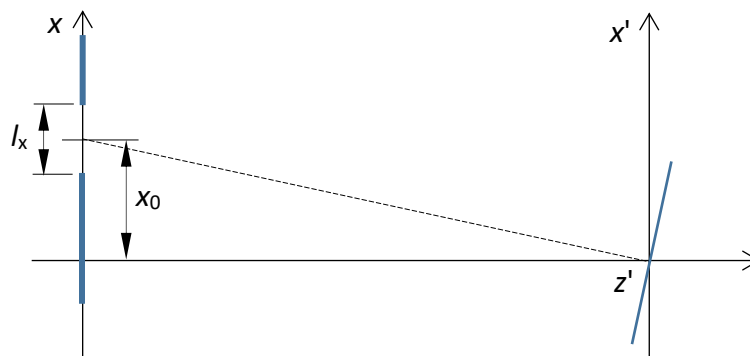
...

Pl. Very Large Telescope – VLT (ESO, paranal Observatory), $D = 8,2 \text{ m}$, $\lambda = 550 \text{ nm}$

$$\Delta\theta' \approx \text{tg } \Delta\theta' = \frac{R_{\text{Airy}}}{z'} = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ rad} \quad (12)$$

A Szaturnusz legnagyobb holdjának, a Titánnak a látószöge: $3,9 \cdot 10^{-6} \text{ rad!}$

3. Az optikai tengelytől eltolt téglalap-apertúra (rés) távolterének modellezése



Legyen az eltolás mértéke x_0 : $E(x, y) \rightarrow E(x - x_0, y)$. (4) alapján:

$$\begin{aligned} \int_{x_0 - l_x/2}^{x_0 + l_x/2} e^{-i \frac{k}{z'}(x'x)} dx &= \left[-\frac{z'}{ikx'} e^{-i \frac{k}{z'}(x'x)} \right]_{x_0 - l_x/2}^{x_0 + l_x/2} = \\ &= -\frac{z'}{ikx'} e^{-i \frac{k}{z'}(x'x_0)} \left[e^{-i \frac{k}{z'}(x' \frac{l_x}{2})} - e^{+i \frac{k}{z'}(x' \frac{l_x}{2})} \right] = \\ &= e^{-i \frac{kx_0}{z'} x'} \cdot l_x \text{sinc} \left(\frac{x' l_x}{\lambda z'} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

A kapott eredményben megjelent egy síkhullám, ami pontosan megfelel a Fourier-transzformáció eltolási tételének, ha a térfrekvencia értékét $f_x = x'/(\lambda z')$ -nek vesszük. Az intenzitáseloszlásban a rés eltolása nem okoz változást.

4. Két szimmetrikusan eltoló téglalap-apertúra (rés) távolterének modellezése

Az eltolás legyen $+x_0$ és $-x_0$: $E(x, y) \rightarrow E(x - x_0, y) + E(x + x_0, y)$. A számolásnak akkor van értelme, ha a rések nem fednek át, azaz $x_0 \geq l_x/2$. Ha $l_y \gg l_x$, akkor a struktúra egy dimenziósra tekinthető. (13) alapján:

$$\int_{x_0 - l_x/2}^{x_0 + l_x/2} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} dx + \int_{-x_0 - l_x/2}^{-x_0 + l_x/2} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x)} dx =$$

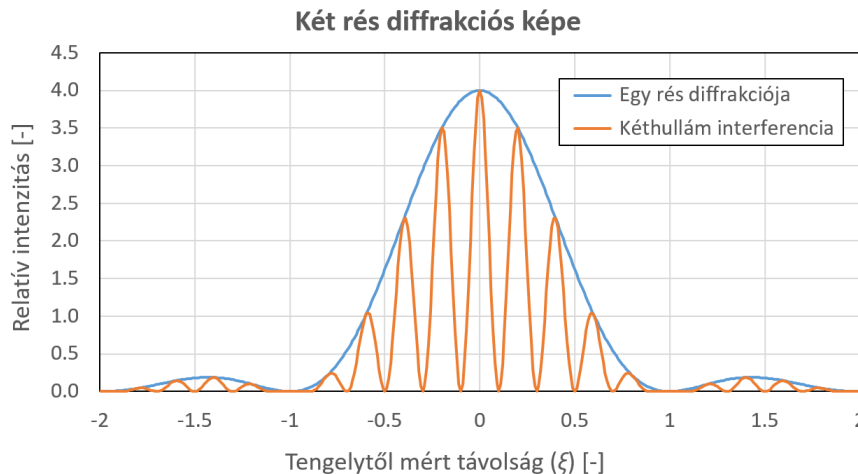
$$\left(e^{-i\frac{kx_0}{z'}x'} + e^{+i\frac{kx_0}{z'}x'} \right) \cdot l_x \operatorname{sinc}\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) = 2 \cos\left(\frac{kx_0}{z'}x'\right) \cdot l_x \operatorname{sinc}\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) \quad (14)$$

A második rés hozzáadása tehát már megváltoztatja az intenzitáseloszlást is:

$$I(x', y') = \frac{v\epsilon}{2} \frac{1}{(\lambda z')^2} l_x^2 l_y^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x'l_x}{\lambda z'}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{y'l_y}{\lambda z'}\right) 4 \cos^2\left(\pi \frac{x'2x_0}{\lambda z'}\right) \quad (15)$$

Ahol $2x_0 = d$, a rések távolsága. A fenti összefüggés a Young-féle kétréses kísérlet skálár diffrakciós modellje. $2 \cos^2(a) \equiv 1 + \cos(2a)$ alapján visszahozzuk a két ferde síkhullám interferogramját is (ld. 7. előadás). Az eredmény teljes összhangban van a kéthullám interferenciával kapott kifejezéssel:

$$4 \cos^2\left(\pi \frac{x'2x_0}{\lambda z'}\right) = 2 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{x_0}{\lambda} \frac{x'}{z'}\right) \right) = 2(1 + \cos(\Delta k' x')) \quad (16)$$



$d/l_x = 5$.

Pl. Helyezzünk el egy hajszálat (vastagság $50 \mu\text{m}$) egy $150 \mu\text{m}$ keskeny, hosszú nyílás közepén, a hossziránnyal párhuzamosan. Az elrendezés optikai modellje két, egymástól $d = 100 \mu\text{m}$ -re lévő középpontú, $l_x = 50 \mu\text{m}$ -es rés. Mivel $l_y \gg l_x$ a számolást egy dimenzióban végezzük, $\lambda = 633 \text{ nm}$. Mekkora az interferenciacsíkok távolsága egy $z' = 200 \text{ mm}$ távolságban lévő ernyőn?

$$2 \frac{2\pi x_0}{\lambda} \frac{x'}{z'} = 2\pi \rightarrow x' = \frac{\lambda z'}{2x_0} = \frac{\lambda z'}{d} \quad (17)$$

$$x' = \frac{\lambda z'}{d} = \frac{0,633 \mu\text{m} \cdot 200 \text{ mm}}{100 \mu\text{m}} = 1,27 \text{ mm} \quad (18)$$

Hány zérushelye van az interferogrammnak az egy rés diffrakciós képének első zérushelyei között (azaz a kétszeres Nyquist-apertúrában)?

$$2x_{\text{Nyquist}} = 2 \frac{\lambda z'}{l_x} \quad (19)$$

$$\frac{2x_{\text{Nyquist}}}{x'} = \frac{2d}{l_x} = 4 \text{ db.} \quad (20)$$