

7. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2024-10-24

1. Többszámú interferencia alkalmazása diffrakciós rács esetén

$f_y = 1200$ vp/mm, $D = 50$ mm, skalár közelítés, merőleges beesés, $\lambda = 500$ nm. Mekkora az első diffraktív rend szöge, $\theta_{m=1}$? A rácsperiódus $a = 1/f_y = 833,3$ nm. A rácsgegyenlet:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_m \cdot a = m2\pi \quad (1)$$

Ha $m = 1$:

$$\sin \theta_{m=1} = \frac{\lambda}{a} = 0.6 \rightarrow \theta_{m=1} = 36,9^\circ. \quad (2)$$

Ehhez képest hány fokos $\Delta\theta$ szögeltérítésnél van az első minimumhely? A diffraktált fény iránykarakterisztikája:

$$I(\delta) = I_1 \left(\frac{\sin(\delta N/2)}{\sin(\delta/2)} \right)^2, \quad (3)$$

ennek az első zérushelye itt van:

$$\Delta\delta N/2 = \pi \rightarrow \Delta\delta = \frac{2\pi}{N} \quad (4)$$

(1)-ből:

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\sin \theta \cdot a = \frac{2\pi}{N} \rightarrow \Delta\sin \theta = \frac{\lambda}{aN} = \frac{\lambda}{D} \quad (5)$$

Kihasználva, hogy $N \gg 1$, azaz $\Delta\delta \ll 2\pi/N$, (5)(1)-ből egyszerűen kiszámolható $\Delta\theta$:

$$\Delta\sin \theta \approx \frac{d \sin \theta}{d\theta} \Delta\theta = \Delta\theta \cdot \cos \theta = \frac{\lambda}{aN} = \frac{\lambda}{D} \quad (6)$$

$$\Delta\theta \cdot 0,8 = 10^{-5} \rightarrow \Delta\theta = 0,013 \text{ mrad}. \quad (7)$$

Mekkora $\Delta\lambda$ értékkel kell arrébbhangolni a hullámhosszat, hogy az első rend iránya pont a fent kiszámított értékkel változzon meg (Rayleigh-kritérium)? (2) és (5) felhasználásával:

$$\sin \theta_{m=1} + \Delta\sin \theta = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{a} \quad (8)$$

$$\frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda}{aN} = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{a} \rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{N} \quad (9)$$

Mivel $N = D/a = 60\,000$:

$$\Delta\lambda = 8,33 \text{ pm}. \quad (10)$$

Fenti érték közvetlenül megkapható az $\mathcal{R}$ felbontóképesség képletéből (ld. előadás):

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \cdot N. \quad (11)$$

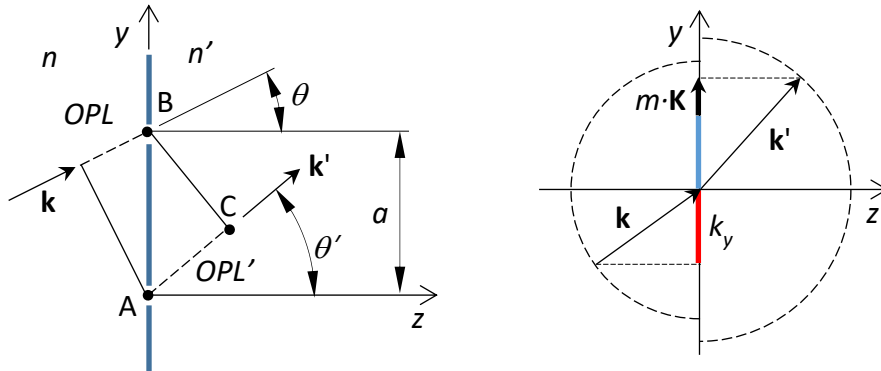
2. Transzmisszív diffrakciós rács ferde beesés esetén

Az „A” pontban lévő résnél a θ szög alatt belépő síkhullám fázisa: φ_A , „B” pontban pedig

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{2\pi}{\lambda_0} OPL. \quad (12)$$

A „B” pontban lévő rés által diffraktált hullámot a távotérben θ' szög alatt vizsgálva egy ilyen irányú síkhullámként érzékeljük. Ezt a síkhullámot virtuálisan visszavezetjük a rácsához és

megrajzoljuk a „B” ponton keresztül átmenő hullámfrontját, ami mentén a fázis végig a (12) által meghatározott érték. Az „A” és „B” résekből diffraktált hullámok fázisát e hullámfront mentén a „C” pontban hasonlítjuk össze. Itt az „A” rés által diffraktált hullám fázisa:



$$\varphi_C = \varphi_A + \frac{2\pi}{\lambda_0} OPL'. \quad (13)$$

Az így kapott két fázis különbsége adja a többhullámú interferencia síkhullámkomponensei közötti fáziskülönbséget, amely az alábbi feltétel mellett konstruktív:

$$\delta = \varphi_C - \varphi_B = \frac{2\pi}{\lambda_0} OPL' - \frac{2\pi}{\lambda_0} OPL = m2\pi \quad (14)$$

$$OPL = n \sin \theta \cdot a ; \quad OPL' = n' \sin \theta' \cdot a \quad (15)$$

$$n' \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta' \cdot a - n \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta \cdot a = m2\pi \quad (16)$$

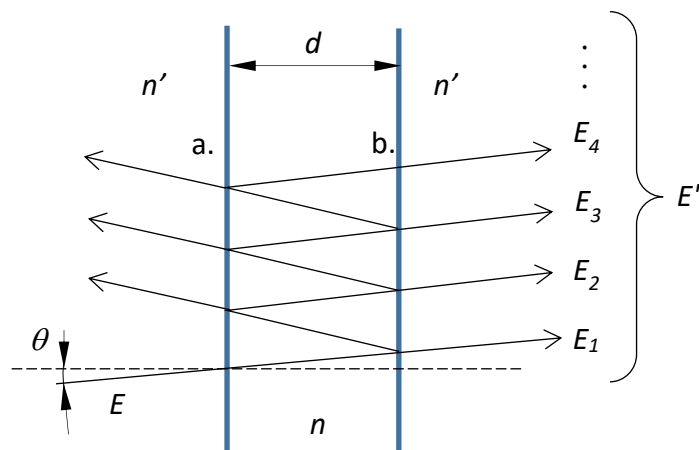
$$n' \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta' = n \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta + \frac{m2\pi}{a} \quad (17)$$

$$k'_y = k_y + m \frac{2\pi}{a} = k_y + mK \quad (18)$$

$$\mathbf{K} \equiv \hat{\mathbf{y}} \cdot \frac{2\pi}{a}, \quad (19)$$

ahol $\mathbf{K}$ neve „rácsvektor”. A (18) egyenlet tökéletes analógiát mutat a Fresnel-reflexiónál tanult fázisillesztéssel. Érdekesség, hogy mivel a fotonok impulzusa $\hbar k$, diffrakciós rácsnál y irányban nem teljesül az impulzusmegmaradás, hiszen a rács kölcsönhat a beeső hullámmal.

3. Fabry-Pérot-interferométer



A fáziskülönbség értéke (merőleges beesés esetén) egy oda-visszaverődésre:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2dn = m \cdot 2\pi \quad (20)$$

Merőleges beesés ($\theta \approx 0^\circ$), a bejövő tér komplex amplitúdója E , az átmenő tér pedig E' . Mivel még egyforma tükrök esetén se lesz egyforma a transzmissziós tényező a két felületen ha $n \neq n'$ (csak a T transzmittancia ugyanaz), ezért megkülönböztetve jelöljük őket τ_a és τ_b -vel:

$$E_1 = E \cdot \tau_a \cdot e^{i\delta/2} \cdot \tau_b \quad (21)$$

$$E_2 = E \cdot \tau_a \cdot e^{i\delta/2} \cdot \rho \cdot e^{i\delta} \cdot \rho \cdot \tau_b \quad (22)$$

$$E_3 = E \cdot \tau_a \cdot e^{i\delta/2} \cdot \rho^2 \cdot e^{i\delta} \cdot \rho^2 \cdot e^{i\delta} \cdot \tau_b \quad (23)$$

$$E_N = E \cdot \tau_a \tau_b \cdot e^{i\delta/2} \cdot (\rho^2 \cdot e^{i\delta})^{N-1} \quad (24)$$

Ha $|q| < 1$, akkor

$$S_N = a_1 \frac{1 - q^N}{1 - q} \quad ; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = a_1 \frac{1}{1 - q} \quad ; \quad a_1 = E \cdot \tau_a \tau_b \cdot e^{i\delta/2} \quad ; \quad q = \rho^2 \cdot e^{i\delta} \quad (25)$$

$$E' = \sum_{j=1}^{N \rightarrow \infty} E_j = E \cdot \tau_a \tau_b \cdot e^{i\delta/2} \cdot \frac{1}{1 - \rho^2 \cdot e^{i\delta}} \quad (26)$$

A Poynting-vektor definíciójából számolt intenzitás (itt a két külső közeg egyforma):

$$I = \frac{v\varepsilon}{2} |E|^2 \quad \text{és} \quad I' = \frac{v\varepsilon}{2} |E'|^2, \quad (27)$$

valamint a Fresnel-formuláknál megtanultuk, hogy merőleges beesés esetén:

$$T = |\tau_a|^2 \cdot \frac{n}{n'} = |\tau_b|^2 \cdot \frac{n'}{n} \Rightarrow |\tau_a|^2 \cdot |\tau_b|^2 = |\tau_a|^2 \cdot \frac{n}{n'} \cdot |\tau_b|^2 \cdot \frac{n'}{n} = T^2 \quad (28)$$

Tehát (26)-ból komplex konjugálttal való szorzás után ez lesz (feltéve, hogy ρ valós):

$$I' = I \cdot T^2 \cdot \frac{1}{1 - R \cdot e^{-i\delta} - R \cdot e^{i\delta} + R^2} = \frac{I \cdot T^2}{1 - R \cdot 2 \cos \delta + R^2} \quad (29)$$

Felhasználva, hogy $\cos 2\alpha \equiv 1 - 2 \sin^2 \alpha$:

$$\frac{I'}{I} = \frac{T^2}{1 - 2R(1 - 2 \sin^2(\delta/2)) + R^2} = \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\delta/2)} = \left(\frac{T}{1 - R} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2(\delta/2)} \quad (30)$$

Ha a rétegekben nincs abszorpció, akkor $R + T = 1$. Airy-függvény:

$$\frac{I'}{I} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2(\delta/2)}. \quad (31)$$

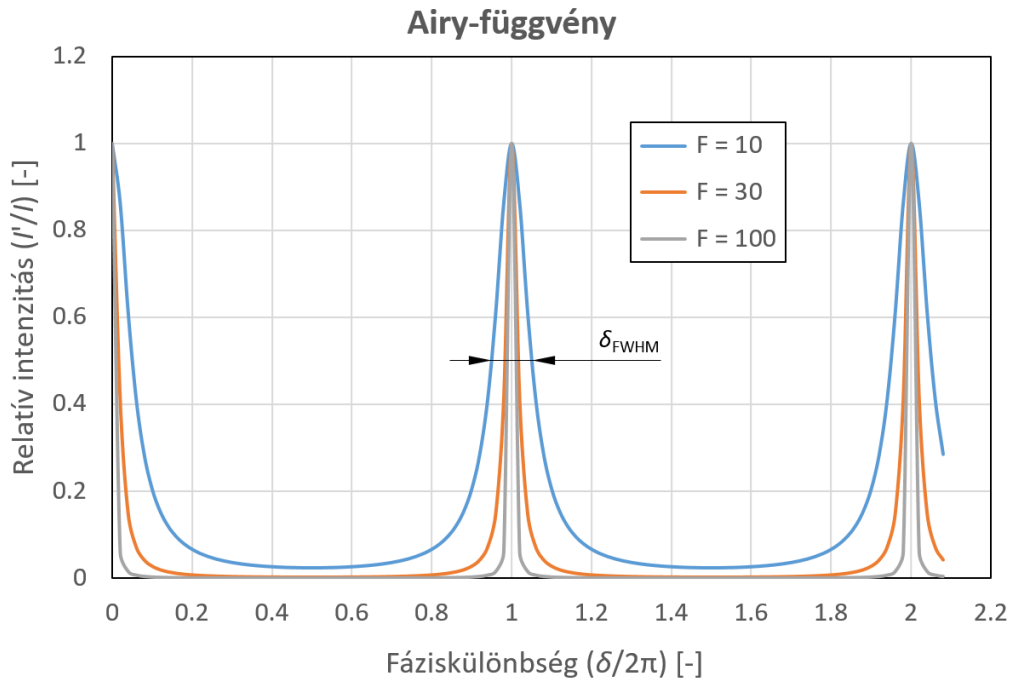
Az interferenciacsúcsok helyei:

$$\delta/2 = m \cdot \pi \rightarrow \delta = m \cdot 2\pi \quad m \in \mathbb{N}^+ \quad (32)$$

Ha ρ nem valós, akkor a komplex reflexiós tényező miatt fellépő fázistolás hozzáadódik δ -hoz, és ez vízszintesen eltolja az Airy-függvényt. A tükrőrrétegekben lévő esetleges abszorpció esetén pedig a csúcsok nem érik el az 1-et. A csúcsok félértékszélessége:

$$\frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2(\delta_{1/2}/2)} = \frac{1}{2} \quad (33)$$

$$\sin \frac{\delta_{1/2}}{2} = \frac{1 - R}{2\sqrt{R}} \quad (34)$$



Ha R közel egységnyi, akkor a jobb oldalon igen kis szám áll, azaz

$$\sin \frac{\delta_{1/2}}{2} \approx \frac{\delta_{1/2}}{2} \quad (35)$$

$$\delta_{1/2} = \frac{1-R}{\sqrt{R}} \rightarrow \delta_{FWHM} = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}} \quad (36)$$

$$\mathcal{F} \equiv \frac{2\pi}{\delta_{FWHM}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}. \quad (37)$$

Ez a „finesse” értéke tipikusan 30..1000 között van. Könnyen igazolható, hogy amennyiben $R \rightarrow 1,0$, akkor az Airy-függvény tart az ún. Lorentz-eloszláshoz.

4. Mennyivel kell a hullámhosszat arrébbhangolni, hogy a fázis éppen δ_{FWHM} -el változzon meg?

$$\frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda} 2d - \frac{2\pi}{\lambda} 2d = \delta_{FWHM} \quad (38)$$

Mivel

$$\frac{1}{1+b} \approx 1-b, \quad \text{ha } b \ll 1 \quad (39)$$

$$\frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} \approx \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \quad (40)$$

Ezt beírva (38)-be:

$$-\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} 2\pi 2d = \delta_{FWHM} \quad (41)$$

Felbontóképesség $\mathcal{R}$ (Taylor-kritérium), értéke (41) átrendezésével megkapható:

$$\mathcal{R} \equiv \left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right| = \frac{1}{\delta_{FWHM}} \frac{2\pi 2d}{\lambda} = \frac{m \cdot 2\pi}{\delta_{FWHM}} = m \cdot \mathcal{F}. \quad (42)$$

Itt m sokkal nagyobb lehet, mint a diffrakciós rácsok esetében! Az interferenciacsúcsokat lézertechnikában longitudinális rezonátormódusnak nevezik. Pl. He-Ne lézer: $\lambda = 633 \text{ nm}$, $d = 150 \text{ mm}$ estén:

$$m = \frac{2d}{\lambda} = \frac{300}{633 \cdot 10^{-6}} = 473\,934 ! \quad (43)$$

Egy He-Ne lézer zárótükrének a reflektanciája nagyobb mint 99,9%, a kicsatoló tüköré pedig kb. 99%. Ha ezek mértani közepét helyettesítjük be a finesse képletébe:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\pi\sqrt{0.989}}{1-0.989} = 284 \quad (44)$$

Ekkor a felbontóképesség

$$\mathcal{R} = m \cdot \mathcal{F} = 1,346 \cdot 10^8 \quad (45)$$

Egy interferenciacsúcs félértékszélessége pedig (42) alapján:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{\mathcal{R}} = \frac{633 \text{ nm}}{1,346 \cdot 10^8} = 0,0047 \text{ pm} ! \quad (46)$$

Ez frekvenciában 3,5 MHz-es sáv szélességnek felel meg (ld. egymódusú lézer). A közönséges He-Ne lézerek egyszerre több módusban működnek (tipikusan 2-5), amelyek 1000-200 MHz távolságban vannak egymástól.

Alkalmazás: lézerezonátorok, Fabry-Pérot etalonok, optikai sávszűrők, spektrumanalizátorok, rezonátor-lecsengési spektroszkópia (cavity ring-down spectroscopy) stb.