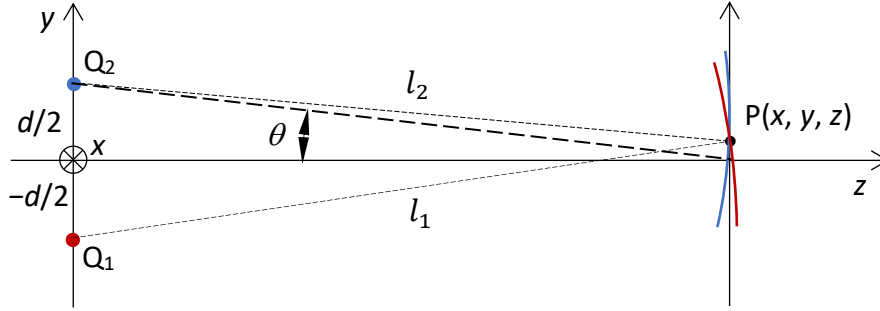


6. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2024-10-17

1. Két gömbhullám interferenciája paraxiális közelítésben

Polarizáció: x-irányú, skalár közelítés.



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (1)$$

$$E_{1,2} \equiv \frac{E_0}{l_{1,2}} e^{ikl_{1,2}} ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2)$$

$$\delta = kl_1 - kl_2 \quad (3)$$

$$l_1 = \sqrt{z^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \quad \text{és} \quad l_2 = \sqrt{z^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2} \quad (4)$$

Feltevés: $d, y, x \ll z$. Emiatt (2) nevezőjében $l_{1,2} \approx z$, azaz $I_1 \approx I_2$, illetve:

$$I = 2I_1(1 + \cos \delta). \quad (5)$$

A fázis meghatározása:

$$l_1 = z \sqrt{1 + \left(\frac{y + \frac{d}{2}}{z}\right)^2 + \frac{x^2}{z^2}} \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y + \frac{d}{2}}{z}\right)^2 + \frac{x^2}{z^2} \right] \right) = z + \frac{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2}{2z} + \frac{x^2}{2z} \quad (6)$$

$$l_2 \approx z + \frac{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2}{2z} + \frac{x^2}{2z} \quad (7)$$

$$\delta = k \left(\frac{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2}{2z} - \frac{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2}{2z} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2yd}{2z} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{z}. \quad (8)$$

Megállapítás: nincs x-függés! Az interferenciacsíkok alakja ($\delta = \text{const.}$):

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{z} \equiv m \cdot 2\pi ; \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

$$y = m\lambda \frac{z}{d} = \frac{m\lambda}{2 \cdot \tan \theta} \approx \frac{m\lambda}{2\theta}. \quad (10)$$

Ha $y = 50$ mm-en $m = 50$ csíkot látunk, akkor (10) alapján, $\lambda = 633$ nm-re $z/d = 1580$! Tehát tényleg alkalmazható a $d \ll z$ közelítés. Alkalmazás pl. Young-féle kétréses kísérlet (hullámfrontosztás), nyíró-interferométer (amplitúdóosztás).

2. Fizeau-interferométer tárgyalása kéthullám interferenciával

Először vizsgáljuk meg egy síkpárhuzamos lemeztől visszavert síkhullám viselkedését közel merőleges beesés mellett. Egy n törésmutatójú d vastagságú plánpárhuzamos lemeztől visszavert EM sugárzást kéthullám interferenciával közelíthetjük, ha a felületi reflektancia kicsi. Beeső síkhullám esetén a fáziskülönbség (ld. előadás):

$$\delta = k_0 \cdot 2nd \cdot \cos \theta_2 + \pi \quad (11)$$

$$\cos \theta_2 \approx 1 - \frac{\theta_2^2}{2} + \dots \quad [\theta_2] = \text{rad} \quad (12)$$

Ha közel merőleges beesést vizsgálunk, akkor

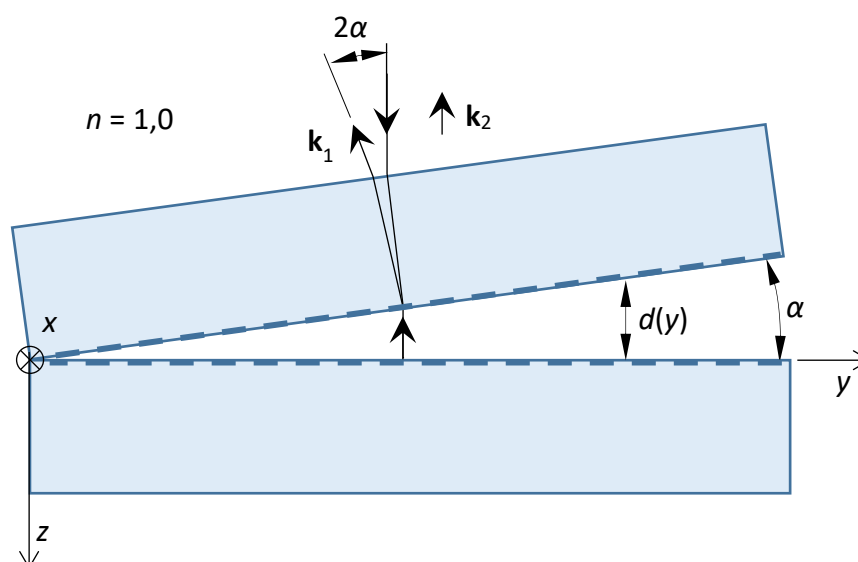
$$\frac{\theta_2^2}{2} \ll 1 \rightarrow |\theta_2| \ll \sqrt{2} \text{ rad} = 81^\circ \rightarrow \theta_2 < 8^\circ \quad (\cos 8^\circ = 0,990) \quad (13)$$

azaz $\cos \theta_2 \approx 1$. Ezzel:

$$\delta \approx k_0 \cdot 2nd + \pi, \quad (14)$$

vagyis igen jó közelítéssel úgy számolhatunk, mintha a beesési szög zérus lenne.

Most nézzük meg az alábbi ábrán látható struktúrát. Legyen $n = 1,0$, azaz levegő, a kéthullámú interferenciában részt vevő alsó és felső határfelületet pedig a két síkpárhuzamos üveglap vastag szaggatott vonallal jelölt, egymással érintkező felületei biztosítsák. Tekintsük úgy, mintha az üveglapok másik felülete tükrözésmentesítő bevonattal lenne ellátva, így ezek reflexióját elhanyagoljuk. Ha a lemezek közötti légrév vastagsága nem állandó, hanem kissé ékes (azaz lineárisan változik), akkor az ún. Fizeau-interferométerhez jutunk.



A két felületről visszavert síkhullámok nem lesznek teljesen párhuzamosak egymással. Az előadáson ezt az esetet is megvizsgáltuk:

$$\delta = (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} + \Delta\varphi = \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \Delta\varphi \quad (15)$$

A felső üveglapon mindkét interferáló síkhullám egyaránt áthalad, emiatt az általa okozott fáziskülönbség konstans (nem függ y -től), így a vizsgálat szempontjából figyelmen kívül hagyhatjuk. Úgy is képzelhetjük, mintha a vastagsága közel nulla lenne. A különbségi vektor mindig az y - z síkban marad, tehát x -függés itt sincs:

$$\Delta \mathbf{k} = k_0((\sin 2\alpha) \cdot \hat{\mathbf{y}} + (-1 + \cos 2\alpha) \cdot \hat{\mathbf{z}}), \quad (16)$$

Ha α elegendően kicsi, a $\Delta \mathbf{k}$ vektor közel párhuzamos az y -iránnyal (azaz $\Delta \mathbf{k}_z \approx 0$). A hiba vizsgálatának menete tehát tökéletesen analóg (13)-al, csak itt

$$2\alpha < 8^\circ \text{ azaz } \alpha < 4^\circ \quad (17)$$

$$\Delta \mathbf{k} \approx k_0(\sin 2\alpha) \cdot \hat{\mathbf{y}} \approx k_0 2\alpha \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad [\alpha] = \text{rad} \quad (18)$$

Ha $\mathbf{r} = y \cdot \hat{\mathbf{y}}$, akkor

$$\delta = k_0 2\alpha \cdot y + \Delta\varphi \quad (19)$$

Mivel ahol $y = 0$ ott nulla az optikai úthosszkülönbség, vagyis ekkor $\Delta\varphi = \pi$, tehát:

$$\delta = k_0 2\alpha \cdot y + \pi \quad (20)$$

Az interferenciacsíkok helyzete:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2\alpha \cdot y + \pi = m \cdot 2\pi ; m \in \mathbb{N}^+ \quad (21)$$

$$y = \frac{m \cdot 2\pi - \pi \lambda_0}{2\alpha} \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{2m - 1}{4\alpha} \lambda_0 \quad (22)$$

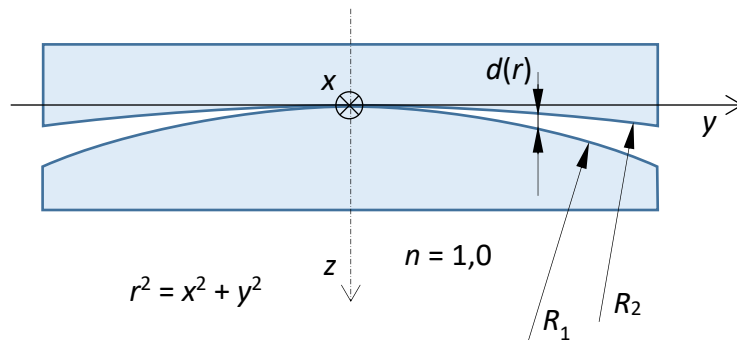
Vegyük észre a csíkpozíció hullámhosszfüggését! Ha feltételezzük, hogy az $y = 50$ mm pozícióig $m = 50$ csíkot látunk, akkor (22) alapján $\lambda_0 = 633$ nm esetén $\alpha = 0,018^\circ$, azaz tényleg jó közelítéssel nulla! Mivel 2α igen kicsi, a következő összefüggés is megfigyelhető:

$$\alpha \approx \frac{d(y)}{y} \quad (23)$$

$$\delta(y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2d(y) + \pi. \quad (24)$$

Alkalmazás: tipikusan felületalak mérés.

3. Newton-gyűrűk tárgyalása kéthullámú interferenciával



$$R_{1,2}^2 = r^2 + (z - R_{1,2})^2 \rightarrow z = R_{1,2} - \sqrt{R_{1,2}^2 - r^2} \quad (25)$$

A gyökvonás után szükséges $\pm$ előjel közül a negatívát választottuk, mert ez írja le a teljes gömbfelület origón átmenő felső félgömbjét. A (13) feltétel teljesüléséhez az kell, hogy r legyen jóval kisebb mint $R_{1,2}$. Ekkor (25) a Taylor-sorának első két tagjával közelíthető:

$$z \approx \frac{r^2}{2R_{1,2}}, \quad (26)$$

$$d(r) = \frac{r^2}{2R_1} - \frac{r^2}{2R_2} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (27)$$

(17) feltétel teljesüléséhez a két felület által (lokálisan) bezárt szögnek kell kicsinek lennie:

$$\alpha \approx \frac{\partial d}{\partial r} = r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) < \left(4^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right) = 0,07 \text{ [rad]} \quad (28)$$

Mivel $r \ll R_{1,2}$ ez is automatikusan teljesül. Nézzük meg a két legfontosabb, speciális esetet:

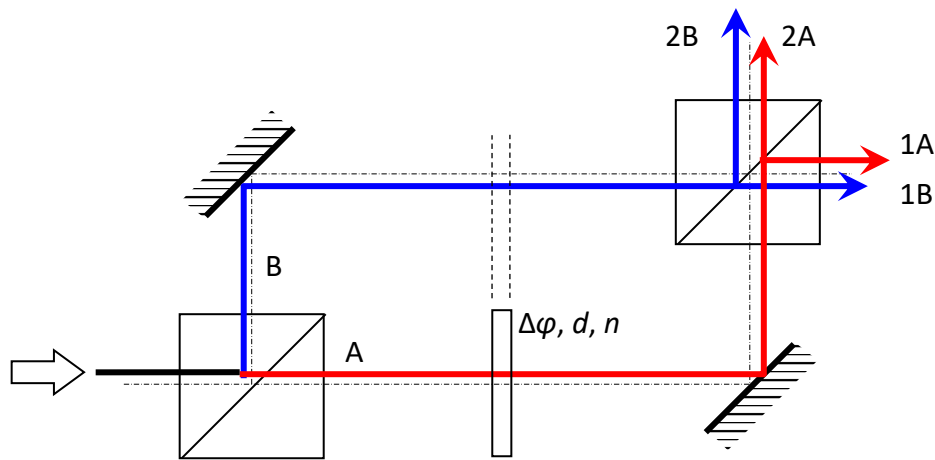
a) Ha $R_1 \approx R_2$ és $R_2 \equiv R_1 + \Delta R$. Alkalmazás: próbaüveg optikai felületek teszteléséhez.

$$d(r) = \frac{r^2}{2} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \approx \frac{r^2}{2} \frac{\Delta R}{R_1^2} ; \quad \delta(r) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{r^2}{R_1^2} \Delta R + \pi \quad (29)$$

b) Ha $1/R_2 = 0$ megkapjuk a klasszikus Newton-gyűrűket ($m \in \mathbb{N}^+$):

$$d(r) = \frac{r^2}{2} \frac{1}{R_1} ; \quad \delta(r) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{r^2}{2R_1} + \pi = m \cdot 2\pi \Rightarrow r = \sqrt{(2m-1)R_1\lambda_0} \quad (30)$$

4. Mach-Zehnder interferométer tárgyalása kéthullám interferenciával



A φ fázistoláshoz számítsuk ki mekkora az úthosszkülönbség (OPD) az üveglapban és az interferométer másik ágán, levegőben, d távolság megtétele esetén:

$$OPD = n \cdot d - 1,0 \cdot d = (n - 1,0) \cdot d \quad (31)$$

$$\Delta\varphi = k_0 OPD = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n - 1,0)d \quad (32)$$

$$\delta_1 = \Phi_{1A} - \Phi_{1B} = \left(0 + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n - 1)d \quad (33)$$

$$\delta_2 = \Phi_{2A} - \Phi_{2B} = (0 + \Delta\varphi + 0) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n - 1)d - \pi \quad (34)$$

Ez egyutas (single-pass) interferométer! Alkalmazás: gázok törésmutatójának mérése, optikai jelfeldolgozás, adattárolás.