

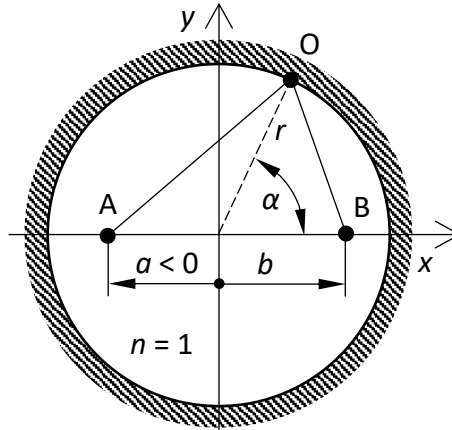
5. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2024-10-17

1. Az előző óráról lemaradt paraxiális anyag befejezése...

2. Fermat-elv alkalmazása fénysugár pályájának meghatározására

Az ábrán látható gömbtükörben milyen α érték esetén lesz az AOB szakasz valódi fénysugár?



$$\begin{aligned} x_O &= r \cos(\alpha) \\ y_O &= r \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (1)$$

$$AO = \sqrt{r^2 \sin^2(\alpha) + (r \cos(\alpha) - a)^2} \quad (2)$$

$$OB = \sqrt{r^2 \sin^2(\alpha) + (b - r \cos(\alpha))^2} \quad (3)$$

$$OPL = AO + OB \quad (4)$$

$$AO = \sqrt{r^2 \sin^2(\alpha) + r^2 \cos^2(\alpha) - 2ar \cos(\alpha) + a^2} = \sqrt{r^2 - 2ar \cos(\alpha) + a^2} \quad (5)$$

$$OB = \sqrt{r^2 \sin^2(\alpha) + r^2 \cos^2(\alpha) - 2br \cos(\alpha) + b^2} = \sqrt{r^2 - 2br \cos(\alpha) + b^2} \quad (6)$$

$$\frac{dOPL}{d\alpha} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{2ar \sin(\alpha)}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos(\alpha) + a^2}} + \frac{1}{2} \frac{2br \sin(\alpha)}{\sqrt{r^2 - 2br \cos(\alpha) + b^2}} = 0 \quad (8)$$

Itt $\sin(\alpha)$ -val egyszerűsíthatunk, ha az értéke nem nulla. Ez akkor következik be, ha $\alpha = 0^\circ$, ami történetesen a feladat triviális megoldása. (Ilyenkor a fény az x-tengely mentén halad.)

$$\frac{a}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos(\alpha) + a^2}} = - \frac{b}{\sqrt{r^2 - 2br \cos(\alpha) + b^2}} \quad (9)$$

$$a^2(r^2 - 2br \cos(\alpha) + b^2) = b^2(r^2 - 2ar \cos(\alpha) + a^2) \quad (10)$$

$$a^2r - 2a^2b \cos(\alpha) = b^2r - 2b^2a \cos(\alpha) \quad (11)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2r - a^2r}{2b^2a - 2a^2b} = \frac{r}{2} \frac{b^2 - a^2}{ab(b - a)} = \frac{r}{2} \frac{b + a}{ab}. \quad (12)$$

3. Példa a komplex törésmutató használatára: az arany abszorpciója, reflexiója

$\lambda_0 = 400 \text{ nm}$, merőleges beesés levegőből arany felületre, lineáris (x, azaz p) polarizáció esetén. $n = 1,468$, $\kappa = 1,953$. Mekkora a felület reflektanciája? A levegő törésmutatóját 1,0-nak tekintjük. $d = 20 \text{ nm}$ vastag aranyrétegen a beeső intenzitás (I_{be}) mekkora része jut át? (A többszörös reflexiókat elhanyagolhatjuk.)

$$\tilde{n} \equiv n - i \cdot \kappa \quad (13)$$

$$R = \left| \frac{1 - \tilde{n}}{1 + \tilde{n}} \right|^2 = \frac{1 - 1,468 + i \cdot 1,953}{1 + 1,468 - i \cdot 1,953} \cdot \frac{1 - 1,468 - i \cdot 1,953}{1 + 1,468 + i \cdot 1,953} = \frac{0,468^2 + 1,953^2}{2,468^2 + 1,953^2} = 40,7\%. \quad (14)$$

Mekkora a behatolási mélység? A z-tengely a felületnormális irányába mutat.

$$E_x(z) \equiv E_{0x} \cdot e^{-ik_{re}z} \cdot e^{-k_{im}z} \quad (15)$$

Az intenzitás csökkenését a Lambert-Beer törvény írja le, azaz (15) abszolútérték-négyzete:

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-2k_{im}z}, \quad (16)$$

ahol I_0 az aranyban $z = 0$ pozícióban mért intenzitás. Merőleges beesés esetén igaz, hogy:

$$k_{im} = k_0 \cdot \kappa \quad (17)$$

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-2k_0 \cdot \kappa \cdot z} = I_0 \cdot e^{-2\frac{z}{\delta}} \quad (18)$$

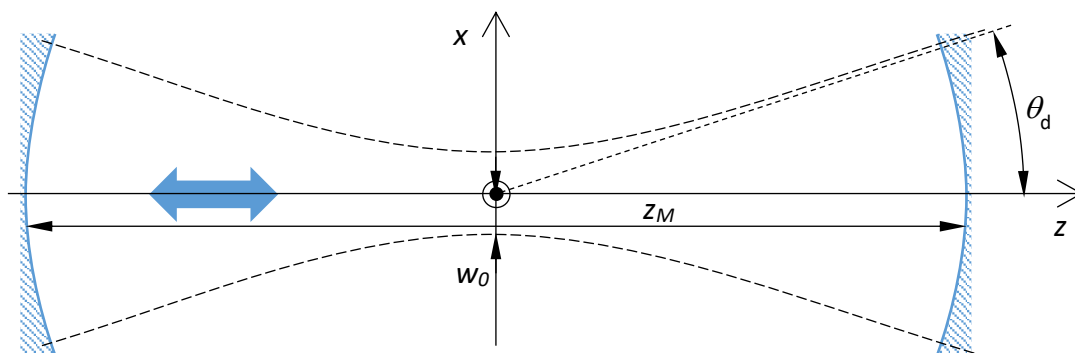
$$\delta = \frac{1}{k_0 \cdot \kappa} = \frac{\lambda_0}{2\pi \cdot \kappa} = \frac{400 \text{ nm}}{2\pi \cdot 1,953} = 32,6 \text{ nm}. \quad (19)$$

$$I(d) = I_{be} \cdot (1 - R)^2 \cdot e^{-2\frac{z}{\delta}} = I_{be} \cdot 0,593^2 \cdot 0,2932 = I_{be} \cdot 10,3\%. \quad (20)$$

4. Ami a Fresnel-formulák óráról lemaradt...

5. Példa Gauss-nyaláb terjedésére: koncentrikus lézerrezonátor

$\lambda = 633 \text{ nm}$, $z_M = 300 \text{ mm}$, a nyaláb divergenciája $\theta_d = 0,6 \text{ mrad}$. Mekkora a nyalábsugár (w_0) a nyak pozíciójában? Mekkora a Rayleigh-tartomány (z_R)? Mekkora a stabil működéshez szükséges tükrerrádusz (R)? A tükrőhordozó nyalábtorzító hatásaitól eltekintünk.



$$\theta_d = \frac{\lambda}{\pi w_0} [\text{rad}] \rightarrow w_0 = \frac{\lambda}{\pi \theta_d} = \frac{633 \cdot 10^{-6} \text{ mm}}{\pi 0,0006} = 0,336 \text{ mm} \quad (21)$$

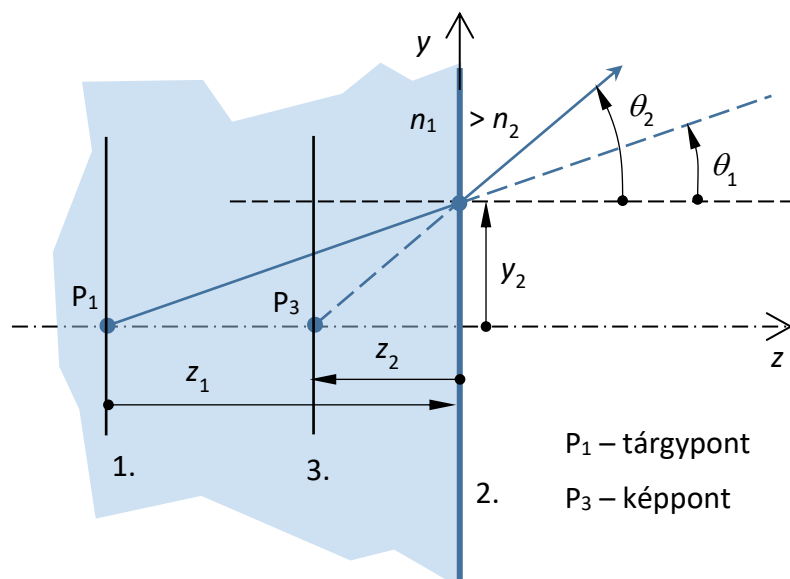
$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = 560,3 \text{ mm} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 R(z) &= z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] = \frac{z_M}{2} \left[1 + \left(\frac{2z_R}{z_M} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{300}{2} \left[1 + \left(\frac{2 \cdot 560,3}{300} \right)^2 \right] = 2243 \text{ mm.}
 \end{aligned} \tag{23}$$

A kapott rádiusz sokkal nagyobb mint a tükrök nyalábnyaktól mért távolsága (150 mm), ami összhangban van azzal, hogy jócskán a Rayleigh-tartományon belül vagyunk.

6. Példa sík felületen való fénytörésre: tárgypont eltolódása

Írjuk föl a Snellius-Descartes-törvény, valamint a mátrixos formalizmus segítségével is a sík felületen való fénytörést egy véges távolságban lévő tárgypont esetére!



$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{24}$$

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2 \rightarrow n_1 \operatorname{tg} \theta_1 \approx n_2 \operatorname{tg} \theta_2 \tag{25}$$

$$n_1 \frac{y_2}{z_1} = n_2 \frac{y_2}{-z_2} \tag{26}$$

$$z_2 = -z_1 \frac{n_2}{n_1}. \tag{27}$$

Másként:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{z_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

1. és 3. sík között leképezés van, tehát $B = 0$:

$$\frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} = 0 \tag{29}$$

$$z_2 = -z_1 \frac{n_2}{n_1}. \tag{30}$$

Vagyis mindkét módszerrel ugyanazt az eredményt kaptuk.