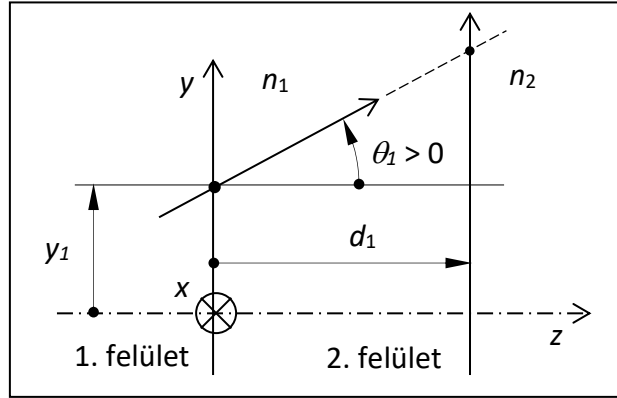


4. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2023-10-06

1. Sugárkoordináták, optikai iránykoszinuszok, előjelek



Optikai iránykoszinuszok: p és q . Pl. $q \equiv n \cdot \theta$

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= A \cdot y_1 + B \cdot q_1 \\ q_2 &= C \cdot y_1 + D \cdot q_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

2. Átviteli mátrixok, elemek jelentése

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

B – értéke nulla, ha leképezés áll fenn a két felület között

A – transzverzális nagyítás (leképezés esetén)

C – a törőerő -1 -szerese (rendszerparaméter)

D – szögnagyítás n'/n -szerese (leképezés esetén)

Egy gömbi felület törőereje (felület sorszáma 2) – akkor pozitív, ha fókuszál:

$$P_2 \equiv \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_2} \quad (3)$$

A rádiusz akkor pozitív, ha a gömb középpontja $+z$ irányban van a homlokponttól.

3. Szabadtéri terjedés mátrixa

Két felület közötti homogén közegben történő fényterjedés közben az iránykoszinusz nem függ a pozíciótól, tehát $C = 0$. Emellett q a kezdő és kiinduló felület között nem változik meg, azaz: $D = 1$. A két felület közötti pozícióváltozás paraxiális közelítésben:

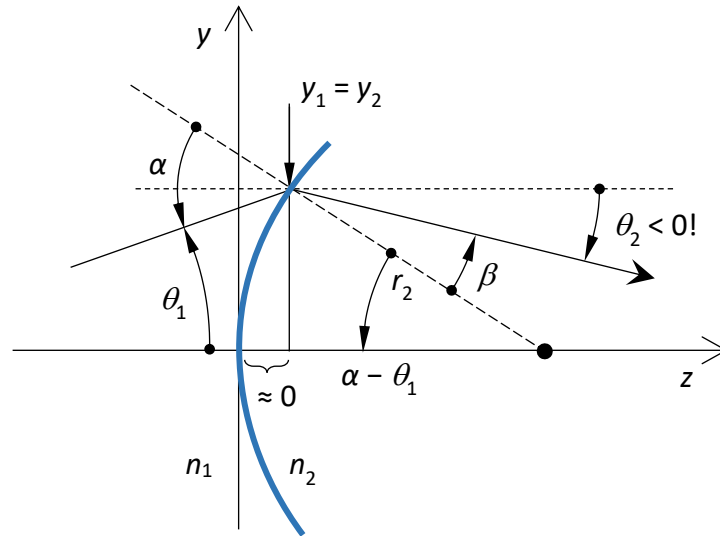
$$y_2 = y_1 + \theta_1 \cdot d_1 = 1 \cdot y_1 + \frac{q_1}{n_1} \cdot d_1 \quad (4)$$

Tehát $A = 1$ és $B = d_1/n_1$, azaz

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

4. Gömbfelületi törés mátrixa, fókusztávolság

Ennél a problémánál úgy tekintjük, mintha az 1. és 2. felület, amely között a terjedést/törést vizsgáljuk pontosan *egybeesne*. Ebből kifolyólag töréskor a sugárdőféspont pozíciója nem változik meg: $A = 1$, valamint nem függ a beesési szögtől sem, tehát $B = 0$.



$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (6)$$

$$\alpha - \theta_1 \approx \frac{y_1}{r_2} \quad (7)$$

$$(\alpha - \theta_1) = \beta - \theta_2 \rightarrow \theta_2 = -(\alpha - \theta_1) + \beta \quad (8)$$

$$\theta_2 = -\frac{y_1}{r_2} + \frac{n_1}{n_2} \alpha \rightarrow \theta_2 = -\frac{y_1}{r_2} + \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{y_1}{r_2} + \theta_1 \right) \quad (9)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{r_2} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) y_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1 \quad (10)$$

$$n_2 \theta_2 = -\frac{n_2 - n_1}{r_2} y_1 + n_1 \theta_1 \quad (11)$$

Tehát $C = -P$ és $D = 1$, ahol P_2 a felület rőfőereje. Ezzel:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Általános esetben, ha a rendszerben több (pl. N db) törőfelület és szabadtéri terjedés van egymás után, akkor a mátrixok összeszorzódnak:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_N \cdot \mathbf{R}_N \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \quad (13)$$

5. Gömbtükör

Egyetlen, n_1 törésmutatójú közegben lévő r_2 rádiuszú gömbi tükörfelület mátrixának felírása. A tükrözési törvény alapján:

$$\beta = -\alpha \quad (14)$$

Ez olyan mintha a törési törvényben $n_2 = -n_1$ lenne, a többi egyenlet változatlan, tehát:

$$P_2 = -2 \frac{n_1}{r_2}. \quad (15)$$

Vagyis a mátrix most is (12) alakú.

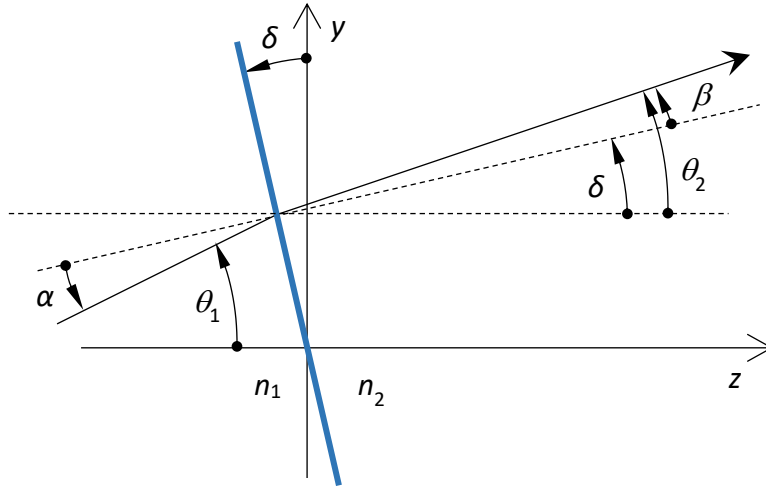
6. Sík törőfelület

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (16)$$

$$\theta_1 = \alpha + \delta \quad (17)$$

$$\theta_2 = \beta + \delta \quad (18)$$

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \alpha + \delta = \frac{n_1}{n_2} (\theta_1 - \delta) + \delta \quad (19)$$



$$n_2 \theta_2 = n_1 (\theta_1 - \delta) + n_2 \delta = n_1 \theta_1 + \delta (n_2 - n_1) \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta (n_2 - n_1) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Azaz a ferde felületnek nem szorzó mátrixa van, hanem konstans, hozzáadódó vektora. Ha $\delta = 0$, akkor egyszerű egység mátrixot kapunk.

7. Vékonylencse

Lencsetörvény (s – tárgytávolság, s' – képtávolság, f' – effektív fókusz távolság a képtérben):

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} + \frac{n}{s} \quad (23)$$

Vékonylencse mátrixa első felületről a másodikra:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 - P_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Vékonylencse mátrixa az első felülettől a fókusz síkig:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{f'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P \frac{f'}{n'} & \frac{f'}{n'} \\ -P & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f'}{n'} \\ -P & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Vezessünk át egy tengelypárhuzamos fénysugarat ($q_1 = 0$) a rendszeren a fókusz síkig (ez a 3. felület) úgy, hogy az 1. felületet y_1 magasságban metszi. A fókusz síkban:

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f'}{n'} \\ -P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f'}{n'} q_1 \\ -P y_1 + q_1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Esetünkben ez:

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Py_1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

vagyis a pozíció nem függ a sugárkoordinátától, az irány pedig:

$$\theta_3 = \frac{q_3}{n'} = -\frac{Py_1}{n'} = -\frac{y_1}{f'}. \quad (28)$$

8. Vastaglencse

Vastaglencse mátrixa az első felületről a másodikra:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - P_1 \frac{d_1}{n_1} & \frac{d_1}{n_1} \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P_1 \frac{d_1}{n_1} & \frac{d_1}{n_1} \\ -P_2 \left(1 - P_1 \frac{d_1}{n_1} \right) - P_1 & -P_2 \frac{d_1}{n_1} + 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$P = P_2 \left(1 - P_1 \frac{d_1}{n_1} \right) + P_1 = P_1 + P_2 - P_1 P_2 \frac{d_1}{n_1}. \quad (32)$$

A fenti összefüggés igen hasznos abból a szempontból, hogy két d_1 távolságra elhelyezett vékonylencse esetén is alkalmazható, hiszen a képletben mindegy, hogy egy felület, vagy egy vékonylencse hozza létre a P_1 és P_2 törőerőket.

9. Összetett rendszerek, fókuszok

Legyen egy levegővel körülvevett ($n = n' = 1,0$) szimmetrikus gyűjtőlencse törőereje $P = +4$ dioptria, a lencse vastagsága $d_1 = 3,0$ mm, törésmutatója $n_1 = 1,5$. Mekkora a lencse fókusz távolsága?

$$P \equiv \frac{n'}{f'} = 4 \text{ m}^{-1} = 0,004 \text{ mm}^{-1} \quad (33)$$

Ebből $f' = 1/0,004 = 250$ mm. A lencse vastagságát is figyelembe véve mekkora a görbületi sugár ($r_1 = -r_2$)?

$$P_1 = P_2 = \frac{n_1 - n}{r_1} = \frac{1,5 - 1}{r_1} = \frac{0,5}{r_1}. \quad (34)$$

$$P = P_1 + P_2 - P_1 P_2 \frac{d_1}{n_1} = \frac{1}{r_1} - \frac{0,25}{r_1^2} \frac{3}{1,5} = 0,004 \quad (35)$$

$$0,004 r_1^2 - r_1 + 0,5 = 0 \quad (36)$$

Ebből $r_1 = 0,501$ mm ; $r_2 = 249,5$ mm – az utóbbi a hétköznapi meg szokott lencséknek megfelelő megoldás. A 0,501 mm-es rádiusz is értelmes, ez annak felel meg, ha a két lencsefelület között van egy köztes fókuszpont.

Mekkora egy felület törőereje? (34)-ből: $P_1 = 2,004 \cdot 10^{-3}$ 1/mm. Mik a lencse mátrixának elemei a két felülete között? (31) alapján:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,996 & 2 \\ -0,004 & 0,996 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Liouville-tétel következménye: az átviteli mátrix determinánsa mindig 1,0. Ez azt is jelenti, hogy a mátrixelemek nem függetlenek egymástól. Az összefüggés számolásaink ellenőrzésére felhasználható. Esetünkben a determináns értéke: 1,000016.

Hol vannak a lencse fókuszai?

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{z}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -A\frac{z}{n} + B \\ C & -C\frac{z}{n} + D \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A + \frac{z'}{n'}C & -A\frac{z}{n} + B + \frac{z'}{n'}\left(-C\frac{z}{n} + D\right) \\ C & -C\frac{z}{n} + D \end{bmatrix} \quad (40)$$

A két fókusz között leképezés áll fenn, melyek között a nagyítás definíció szerint +1. Tehát:

$$A + \frac{z'}{n'}C = 1 \Rightarrow z' = (1 - A)\frac{n'}{C} \quad (41)$$

Ebből $z' = -1,00$ mm. A szögnagyítás értékéből a következő jön ki:

$$-C\frac{z}{n} + D = 1 \Rightarrow z = (D - 1)\frac{n}{C}. \quad (42)$$

Ebből: $z = 1,00$ mm. Itt a két sík között fennálló leképezés esetén érvényes Lagrange-Helmholtz egyenletet (tulajdonképpen az energiamegmaradást) használtuk ki: $m \cdot m_\alpha = n/n'$, azaz leképezés esetén $A \cdot D = 1$.