

3. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2023-09-21

1. Reflektancia, transzmittancia

$$R = |\rho|^2 ; \quad T = |\tau|^2 \cdot \frac{n' \cos \theta'}{n \cos \theta} \quad (1)$$

2. Fresnel-formulák alkalmazása: merőleges beesés levegőből üvegre

A levegő törésmutatója $n = 1.0$, az egyik tipikus optikai üvegnek (BK7) $n' = 1.519$ (550 nm-es hullámhosszon). Merőleges beesés mellett mennyi a felület reflektanciája?

$$R = \left(\frac{n - n'}{n + n'} \right)^2 = 0.206^2 = 4.2\% \quad (2)$$

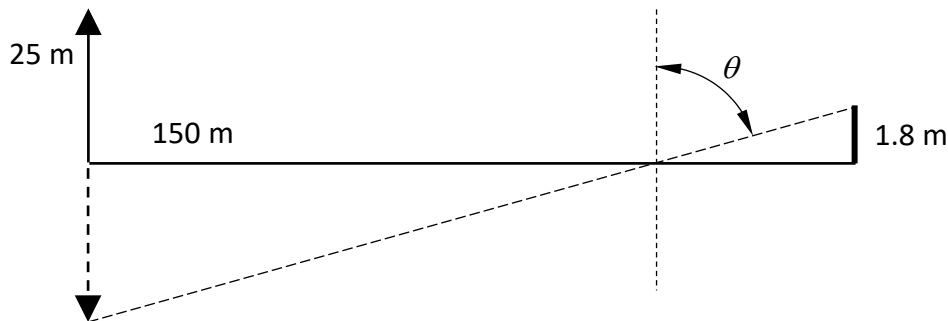
3. Fresnel-formulák alkalmazása: merőleges beesés levegőből alumíniumra

A levegő törésmutatója $n = 1.0$, az alumínium komplex törésmutatója $\tilde{n}' = 1.0 - i \cdot 6.6$ (550 nm-es hullámhosszon). Merőleges beesés mellett mennyi a felület reflektanciája?

$$R = \left| \frac{n - n'}{n + n'} \right|^2 = \frac{1.0 - 1.0 + i6.6}{1.0 + 1.0 - i6.6} \cdot \frac{1.0 - 1.0 - i6.6}{1.0 + 1.0 + i6.6} = \frac{6.6^2}{2.0^2 + 6.6^2} = 91.6\% \quad (3)$$

4. Fresnel-formulák alkalmazása: ferde beesés vízfelületre

Egy 150 m széles tó egyik partjáról szemléljük a víztükörben a másik parton álló kastély 25 m magas tornyát. Számoljuk ki a csúcshoz tartozó beesési szöget, valamint a reflektanciát s- és p-polarizációra. A víz törésmutatója 550 nm-en $n' = 1.334$, a levegőé $n = 1.0$, a szemmagasságunk 1.8 m.



$$\theta = \text{atg} \left(\frac{150}{1.8 + 25} \right) = 79.9^\circ \rightarrow \cos \theta = 0.176 \quad (4)$$

$$\cos \theta' = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta}{n'} \right)^2} = 0.675 \quad (5)$$

$$\rho_s = \frac{n \cos \theta - n' \cos \theta'}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} = \frac{0.176 - 1.334 \cdot 0.675}{0.176 + 1.334 \cdot 0.675} = -0.673 \quad (6)$$

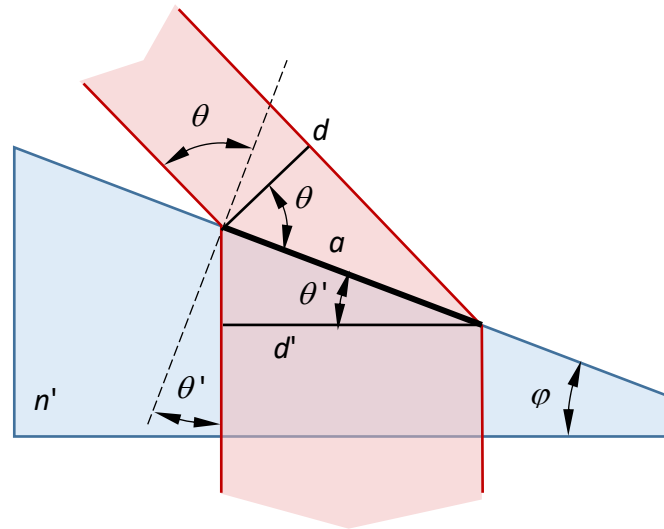
$$\rho_p = \frac{n' \cos \theta - n \cos \theta'}{n' \cos \theta + n \cos \theta'} = \frac{1.334 \cdot 0.176 - 0.675}{1.334 \cdot 0.176 + 0.675} = -0.484 \quad (7)$$

$$R_s = \rho_s^2 = 45.3\% \quad (8)$$

$$R_p = \rho_p^2 = 23.4\% \quad (9)$$

5. Anamorfikus prizma: nyalábméret-változás

Egy SF11 optikai üveganyagból készült, 633 nm-en $n' = 1.779$ törésmutatójú anamorfikus prizmapár egyik elemét vizsgáljuk levegőben. Hány fokos beesési szög (θ) mellett növeli a prizma a fénynyaláb méretét 2-szeresére? Hány fokos legyen a prizma törőszöge (φ), ha azt szeretnénk, hogy a fény merőlegesen lépjen ki a másik oldalon?



$$\cos \theta' = \frac{d'}{a} ; \cos \theta = \frac{d}{a} \quad (10)$$

$$\frac{d'}{\cos \theta'} = \frac{d}{\cos \theta} ; d' = 2d \quad (11)$$

$$2 \cos \theta = \cos \theta' \rightarrow 4 \cos^2 \theta = \cos^2 \theta' \quad (12)$$

$$\sin \theta = n' \sin \theta' \rightarrow 4(1 - \sin^2 \theta) = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{n'^2} \quad (13)$$

$$3 = \left(4 - \frac{1}{n'^2}\right) \sin^2 \theta \quad (14)$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{3}{4 - \frac{1}{1.779^2}}} = 0.902 \rightarrow \theta = 64.5^\circ \quad (15)$$

Merőleges kilépő nyalábnál:

$$\theta' = \varphi \quad (16)$$

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{n'} \rightarrow \theta' = 30.5^\circ \quad (17)$$

6. Brewster-effektus magyarázata előadásanyag alapján...

7. Példa Brewster-effektusra: reflexió üveglapon

Ejtsünk egy 550 nm-es hullámhosszúságú fénynyalábot (síkhullám) levegőből BK7 üvegre ($n' = 1.519$). Mekkora a Brewster-szög (θ_B) a beesési oldalon? Mekkora felület reflektanciája (R_s)?

Először határozzuk meg a θ_B kiszámításához szükséges képletet. A Fresnel-formulák alapján Brewster-szögű beesés esetén nincs p-polarizációjú komponens:

$$\rho_p = \frac{n' \cos \theta_B - n \cos \theta'}{n' \cos \theta_B + n \cos \theta'} = 0 \Rightarrow n' \cos \theta_B - n \cos \theta' = 0 \quad (18)$$

$$n' \cos \theta_B = n \cos \theta' \quad (19)$$

A fenti feltételből még ki kell ejteni a törési szöget. Emiatt átrendezzük és négyzetre emeljük:

$$\cos^2 \theta' = \frac{n'^2}{n^2} \cos^2 \theta_B \quad (20)$$

A második egyenlet, ami θ' kiejtéséhez szükséges, az a Snellius-Descartes-féle törési törvény:

$$n \sin \theta_B = n' \sin \theta' \quad (21)$$

Ezt is átrendezzük, és négyzetre emeljük:

$$\sin^2 \theta' = \frac{n^2}{n'^2} \sin^2 \theta_B \quad (22)$$

Végül (20)-at és (22)-t összeadjuk:

$$\frac{n^2}{n'^2} \sin^2 \theta_B + \frac{n'^2}{n^2} \cos^2 \theta_B = \sin^2 \theta' + \cos^2 \theta' = 1 \quad (23)$$

A jobb oldalon szereplő 1-es érték kifejezhető a beesési szög szinuszával és koszinuszával is:

$$\frac{n^2}{n'^2} \sin^2 \theta_B + \frac{n'^2}{n^2} \cos^2 \theta_B = \sin^2 \theta_B + \cos^2 \theta_B \quad (24)$$

$$\left(\frac{n'^2}{n^2} - 1 \right) \cos^2 \theta_B = \left(1 - \frac{n^2}{n'^2} \right) \sin^2 \theta_B \quad (25)$$

$$\left(\frac{n'^2 - n^2}{n^2} \right) \cos^2 \theta_B = \left(\frac{n'^2 - n^2}{n'^2} \right) \sin^2 \theta_B \quad (26)$$

Ebből a végeredmény:

$$\tan \theta_B = \frac{n'}{n}. \quad (27)$$

Pontosan ezt az összefüggést kapjuk akkor is, ha azt a feltételt vizsgáljuk, hogy megtört és a visszavert nyalábok merőlegesek egymásra, ami tehát ekvivalens azzal, hogy $\rho_p = 0$. Ebben az esetben ugyanis

$$\theta' + \theta_B = 90^\circ \quad (28)$$

Emellett teljesül a Snellius-Descartes-törvény is, így:

$$n \sin \theta_B = n' \sin \theta' \rightarrow n \sin \theta_B = n' \sin(90^\circ - \theta_B) \quad (29)$$

$$n \sin \theta_B = n' (1 \cdot \cos \theta_B - 0 \cdot \sin \theta_B) \quad (30)$$

$$\tan \theta_B = \frac{n'}{n}. \quad (31)$$

Ebből: $\theta_B = 56.6^\circ$. Szükségünk lesz még a törési szögre is. Ez (28) alapján $\theta' = 33.4^\circ$. Innen:

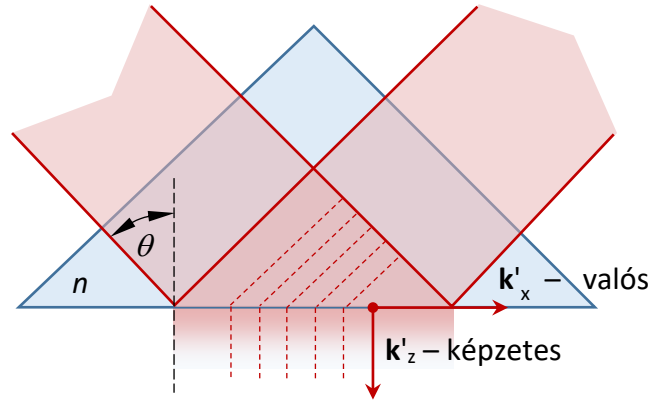
$$R_s = |\rho_s|^2 = \left| \frac{n \cos \theta - n' \cos \theta'}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} \right|^2 = \left| \frac{0.550 - 1.519 \cdot 0.835}{0.550 + 1.519 \cdot 0.835} \right|^2 \quad (32)$$

Innen: $R_s = 15.6\%$, vagyis a visszavert fény ugyan polarizált, de az effektus hatásfoka nem túl magas.

8. Teljes belső visszaverődés magyarázata előadásanyag alapján...

9. Példa teljes belső visszaverődésre: üveg-levegő határfelület

Egy $\lambda_0 = 550$ nm-es síkhullám BK7 üvegben terjed ($n = 1.519$), majd levegő határfelületéhez érkezik ($n' = 1.0$). Mekkora a TIR (total internal reflection) határszöge (critical angle, θ_c)?



A határszögnél $\theta' = 90^\circ$, tehát

$$n \sin \theta = n' \sin 90^\circ \rightarrow \theta_c = \arcsin \frac{n'}{n} \quad (33)$$

Ebből: $\theta_c = 41.2^\circ$. Essen most ez a síkhullám $\theta = 45^\circ$ -os szög alatt a határfelületre. Mekkora a visszavert nyaláb fázistolása a beesőhöz képest s- és p-polarizáció esetén?

$$\rho_s = \frac{1 + i\gamma}{1 - i\gamma} = e^{i\varphi_s} \text{ és } \rho_p = \frac{1 + i\gamma \left(\frac{n}{n'}\right)^2}{1 - i\gamma \left(\frac{n}{n'}\right)^2} = e^{i\varphi_p} \quad (34)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}}{n \cos \theta} = \frac{\sqrt{1.519^2 \cdot 0.5 - 1}}{1.519 \cdot 0.707} = 0.365 \quad (35)$$

$$\varphi_s = 2 \arctg \gamma = 40.1^\circ \quad (36)$$

$$\varphi_p = 2 \arctan \left(\gamma \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \right) = 2 \arctan(0.365 \cdot 1.519^2) = 80.2^\circ \quad (37)$$

A két fázis különbsége: $\varphi_p - \varphi_s = 40.1^\circ = 0.223\pi$ [rad]

Mekkora a behatolási mélység levegőbe? Mivel

$$a \equiv \frac{k'_z}{k_z} = -i\gamma \rightarrow \tilde{k}'_z = 0 - ik_z\gamma \quad (38)$$

A komplex hullámszámvektort így definiáltuk:

$$\tilde{k}'_z \equiv k'_{re} - ik'_{im} \rightarrow k'_{im} = k_z\gamma \quad (39)$$

$$k_z = \cos \theta \cdot n \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (40)$$

A behatolási mélység:

$$\delta \equiv \frac{1}{k'_{im}} = \frac{1}{k_z\gamma} = \frac{\lambda_0}{\cos \theta \cdot n 2\pi\gamma} = \frac{550}{0.707 \cdot 1.519 \cdot 2\pi \cdot 0.365} = 223 \text{ nm} \quad (41)$$