

2. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2024-09-12

1. Komplex törésmutató alkalmazása: hegesztőpajzs-üveg vizsgálata

$\lambda_0 = 313$ nm (UVB), $T = 0,00002\%$, csak a belső abszorpciót vizsgáljuk (a felületi reflexióval most nem foglalkozunk), merőleges beesés, lineáris polarizáció esetén. $n = 1,5$, mekkora κ ? A z-tengely a felületnormális irányába mutat. Az anyag vastagsága: $z = 6,0$ mm.

$$\tilde{n} \equiv n - i \cdot \kappa \quad (1)$$

$$E_x(z) = E_0 \cdot e^{-ik_{\text{rez}}z} \cdot e^{-k_{\text{im}}z} \quad (2)$$

Az intenzitás csökkenését a Lambert-Beer törvény írja le, azaz (2) abszolútérték-négyzete:

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-2k_{\text{im}}z} \quad (3)$$

Merőleges beesés esetén igaz, hogy:

$$k_{\text{im}} = k_0 \cdot \kappa \quad (4)$$

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-2k_0\kappa z} = T \cdot I_0 \quad (5)$$

$$-2k_0\kappa z = \ln(T) \quad (6)$$

$$\kappa = -\frac{\ln(T)}{2k_0z} = -\frac{\ln(T)}{4\pi z} \lambda_0 \quad (7)$$

Amből $\kappa = 6,4 \cdot 10^{-5}$.

2. Komplex törésmutató alkalmazása: behatolási mélység fémek esetén

$\lambda_0 = 550$ nm, merőleges beesés, lineáris polarizáció. Alumínium: $n = 1,0$, $\kappa = 6,6$, mekkora δ ? A z-tengely a felületnormális irányába mutat. (5) alapján:

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-2k_0\kappa z} = I_0 \cdot e^{-2\frac{z}{\delta}} \quad (8)$$

$$\delta = \frac{1}{k_{\text{im}}} = \frac{1}{k_0\kappa} = \frac{\lambda_0}{2\pi\kappa} \quad (9)$$

Ebből $\delta = 13$ nm.

3. Paraxiális hullámegyenlet dielektrikumokban

Az elektromos térerősséget szeparálható alakban keressük (komplex jelölésrendszer!):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t} \quad (10)$$

Helmholtz-egyenlet:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \varepsilon\mu\omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \text{ mivel } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad (11)$$

$\mathbf{E}$ komplex, k az ω körfrekvenciájú síkhullám hullámszámvektorának hossza az adott közegben, λ pedig ugyanezen síkhullám hullámhossza ($\lambda = \lambda_0/n$). A hullám legyen x-irányban polarizált:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow E_x(\mathbf{r}) \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0, \quad (13)$$

és jellemző terjedési iránya legyen a z-tengely:

$$E_x(\mathbf{r}) \equiv E_0 \cdot u(x, y, z) \cdot e^{-ikz}. \quad (14)$$

$$\frac{1}{E_0} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 u \cdot e^{-ikz} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} \cdot e^{-ikz} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot e^{-ikz} \approx -k^2 u \cdot e^{-ikz} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} \cdot e^{-ikz} \quad (15)$$

Ha az alábbi feltétel teljesül, paraxiális közelítésben vagyunk:

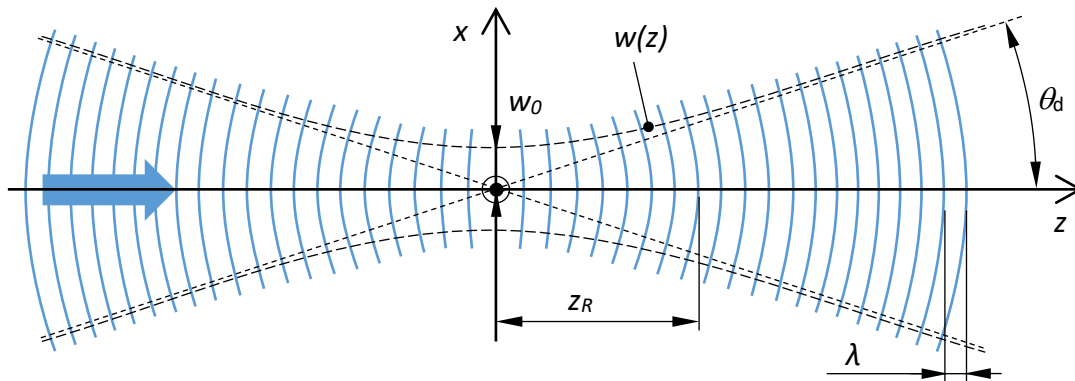
$$2k \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \rightarrow 4\pi \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \lambda \gg \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \lambda^2 \quad (16)$$

ahol mindkét oldalt osztottuk k^2 -el. Mivel $k^2 E_x$ kiesik, ekkor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

ez a paraxiális, időfüggetlen hullámegyenlet. Ez formailag megegyezik a Schrödinger-egyenlettel, ha a potenciál zérus, és $t \rightarrow z$.

4. Gauss-nyaláb jellemzői



Szabadtéri terjedés esetén (17) analitikus megoldása egy integrálegyenlet: a skalár diffrakció Fresnel-közelítése, amiről később lesz szó. A Fresnel-integrál rendelkezik sajátfüggvényekkel, ezek az ún. Hermite-Gauss-nyalábok, melyek természetesen kielégítik a fenti hullámegyenletet is (ennek igazolása messze túlmutat a gyakorlat keretein). Legegyszerűbb alakjuk a Gauss-nyaláb, amely tengelyszimmetrikus z-re:

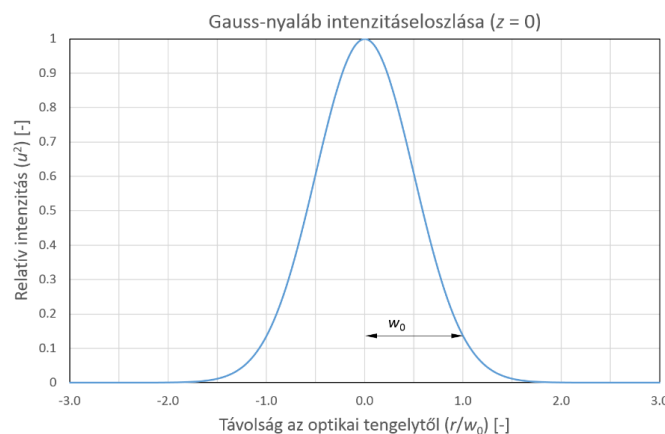
$$u(x, y, z) \equiv \frac{w_0}{w} \cdot e^{-\left(\frac{r}{w}\right)^2} \cdot e^{-ik \frac{r^2}{2R}} \cdot e^{i\varphi} \quad (18)$$

ahol a w, R, φ mind z -től függő mennyiségek, és

$$r^2 \equiv x^2 + y^2 \quad (19)$$

Nyalábsugár ($1/e^2$ intenzitású rádiusz) helyfüggése:

$$w^2(z) \equiv w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (20)$$



Képzeld el egy pillanatra, hogy a koordináta-rendszert eltoljuk egy pozitív értékű z -pozícióba, ahol a hullámfront *balra görbül*. Az ezen origón áthaladó, z -tengelyen lévő középponttal rendelkező, $R < 0$ sugarú gömbhullám hullámfrontja paraxiális közelítésben, ld. múlt óra:

$$z \approx \frac{r^2}{2R}, \quad \text{ahol} \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (21)$$

Mivel Gauss-nyaláboknál R előjelét éppen akkor tekintik pozitívnak, amikor a kör középpontja negatív irányban van eltolva a z -tengely mentén, ezért a balra hajló hullámfront egyenlete:

$$z \approx -\frac{r^2}{2R}. \quad (22)$$

Ha a hullámfronttól mérjük az x -tengelyig a távolságot, akkor ennek -1 -szerese az érték. Mivel a hullámfronttól az x -tengelyig eljutva további fáziskésést szenved a fény, újra előjelet kell váltanunk, ez magyarázza (18) előjelét. A hullámfront görbületi sugarának helyfüggése:

$$R(z) \equiv z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Ha z tart ∞ -hez, akkor $R \rightarrow z$, azaz a nyaláb átalakul egy origó középpontú gömbhullámmá. Gouy-féle fáziseltolódás:

$$\varphi(z) \equiv \arctan \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (24)$$

φ tart $\pi/2$ -höz, ha z tart $+\infty$ -hez. A fázis siet, azaz olyan, mintha a lokális hullámhossz kicsit nagyobb lenne mint a síkhullámé! A $z = 0$ környezetében $\arctan(x) \approx x$ a (24) egyenletben, azaz a fázis közel lineárisan változik. Ekkor a hullámhossz relatív növekedése a következő:

$$\varphi(z)|_{z=0} \approx \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} \cdot z = \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} ; \quad e^{-ikz} \cdot e^{i \frac{\partial \varphi}{\partial z} z} = e^{-ik'z} \rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx \frac{\lambda^2}{2\pi^2 w_0^2} \quad (25)$$

Pl.: ha $w_0 = 10\lambda$, akkor a hullámhossznövekedés 5%. Ugyanitt összefoglalva a többi jellemző:

$$R(z)|_{z=0} = \infty \quad (26)$$

$$w(z)|_{z=0} = w_0 \quad (27)$$

$$E_x(z)|_{z=0} = E_0 \quad (28)$$

A $z = 0$ pozíciót, ahol a legkisebb a nyalábsugár (w_0) nyalábnyaknak nevezik (beam waist).

Lézerrezonátorok csak úgy működnek stabilan (azaz diffrakcióval akkor nem szivárog belőlük fény), ha bennük épp Hermite-Gauss-nyalábok terjednek – ezeket nevezzük transzverzális rezonátormódusoknak. Ebben a terminológiában a Gauss-nyaláb az ún. TEM₀₀ módus.

5. A Gauss-nyaláb divergenciája (széttartása)

Bármely Gauss-nyaláb jól közelíthető egy gömbhullámmal, ha (ld. (20)):

$$\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \gg 1 \rightarrow z \gg \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (29)$$

azaz ha $z \rightarrow \infty$. Ekkor a θ_d divergencia:

$$w_\infty \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = \frac{\lambda z}{\pi w_0} \rightarrow \theta_d \equiv \arctan \left(\frac{w_\infty}{z} \right) \approx \frac{w_\infty}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0} [\text{rad}]. \quad (30)$$

Nyalábparaméter-szorzat

$$BPP \equiv \theta_d \cdot w_0 = \frac{\lambda}{\pi} \quad (31)$$

Igazolható, hogy az összes létező nyaláb közül a Gauss-nyaláb esetén a legkisebb ez az érték (vö. Heisenberg-féle határozatlansági reláció).

Mekkora egy $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ hullámhosszúságú, $w_0 = 0,8 \text{ mm}$ rádiuszú Gauss-nyaláb (ld. He-Ne lézer) divergenciája? (30) alapján $\theta_d = 633 \cdot 10^{-6} / 0,8 / \pi = 0,25 \text{ mrad}$. Mekkora a folt átmérője 1 km távolságban? $2 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 0,5 \text{ m}$. Vajon tényleg használható itt a távolféteri közelítés? A kérdés megválaszolásához előbb értelmezzük a (29)-ben szereplő $\pi w_0^2 / \lambda$ kifejezést.

6. A Gauss-nyaláb minimális görbületi sugara hullámfrontja

A hullámfront görbületi sugara folyamatosan változik z -függvényében. Hol a legkisebb R ?

$$\frac{d}{dz} \left[z + \frac{1}{z} \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \right)^2 \right] = 1 - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \right)^2 = 0 \quad (32)$$

Ezt nevezzük Rayleigh-tartománynak:

$$z_R \equiv \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (33)$$

Mekkora itt a nyalábsugár?

$$w(z_R) \equiv w_0 \sqrt{2} \quad (34)$$

Mekkora az előbbi He-Ne lézer Rayleigh-tartománya? $z_R = \pi \cdot 0,8^2 / (633 \cdot 10^{-6}) = 3176 \text{ mm}$, tehát az ennél sokkal nagyobb 1 km-es távolságban valóban alkalmazható a távolféteri közelítés.

7. Gauss-nyaláb esetén mik a paraxiális közelítés feltételei? – Kiegészítő anyag

Vizsgáljuk meg a (16) feltételt az optikai tengelyen, azaz $r = 0$. Ebben az esetben (18)-ból ez marad:

$$u(x, y, z) \equiv \frac{w_0}{w} \cdot e^{i\varphi} \quad (35)$$

Az összefüggés egyszeresen és kétszeresen is deriválható. Elvégezve a műveleteket, (16) a következő alakúra egyszerűsödik:

$$z + \frac{z_R^2}{z} \gg 4\lambda \quad (36)$$

A bal oldalnak pont akkor van minimuma, ha $z = z_R$. Ekkor

$$z_R \gg 2\lambda \quad (37)$$

Ide behelyettesítve (33)-t:

$$\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \gg 2\lambda \rightarrow w_0 \gg \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda = 0,80\lambda \quad (38)$$

A paraxiális közelítés másik feltétele, hogy E_z és $E_y \ll E_x$, azaz a skalár közelítés legyen érvényes. A tapasztalat azt mutatja, hogy a vektordiffrakció hatásaitól eltekinthetünk olyan nyalábok esetén, ahol a numerikus apertúra (NA) kisebb mint 0,6:

$$NA \equiv n \cdot \sin(\theta_d) < 0,6 \quad (39)$$

Ha $n = 1$, akkor ebből:

$$\theta_d < 0,64 \text{ rad} \quad (40)$$

(30) alapján:

$$\frac{\lambda}{\pi w_0} < 0,64 \rightarrow w_0 > 0,50\lambda \quad (41)$$

(38) és (40) közül az előbbi a szigorúbb. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy Gauss-nyalábok vizsgálata esetén akkor teljesülnek a paraxiális közelítés feltételei, ha

$$w_0 \geq 8\lambda. \quad (42)$$