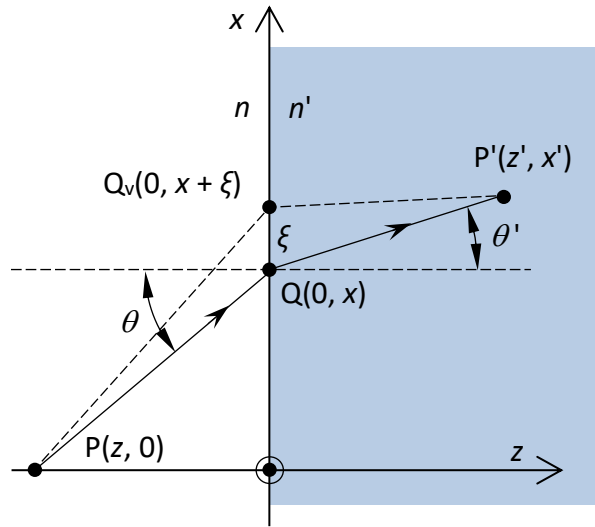


1. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2024-09-05

1. Fermat-elv működésének demonstrációja: törési törvény igazolása

Tudjuk, hogy homogén közegben egyenes vonal mentén terjed a fény, ezért csak ilyen lehetséges pályákat vizsgálunk. Q-val azt a pontot jelöljük, ahol a fénysugár valójában metszi a felületet. A feladat az, hogy sík felületen megtörő síkhullám esetén találjuk meg azt a $\theta - \theta'$ párost, ahol az optikai út hossza első rendben stacionárius. A beeső síkhullámot reprezentáló fénysugarat a P pontból indítjuk, a P' pont felé.



$$OPL(PQ_vP') = n\sqrt{(x + \xi)^2 + z^2} + n'\sqrt{(x' - x - \xi)^2 + z'^2} \quad (1)$$

$$\frac{dOPL}{d\xi} = \frac{n}{2} \frac{2(x + \xi)}{\sqrt{(x + \xi)^2 + z^2}} - \frac{n'}{2} \frac{2(x' - x - \xi)}{\sqrt{(x' - x - \xi)^2 + z'^2}} = 0 \quad (2)$$

Ha $\xi = 0$

$$\frac{nx}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{n'(x' - x)}{\sqrt{(x' - x)^2 + z'^2}} \quad (3)$$

Trigonometriai összefüggések alapján:

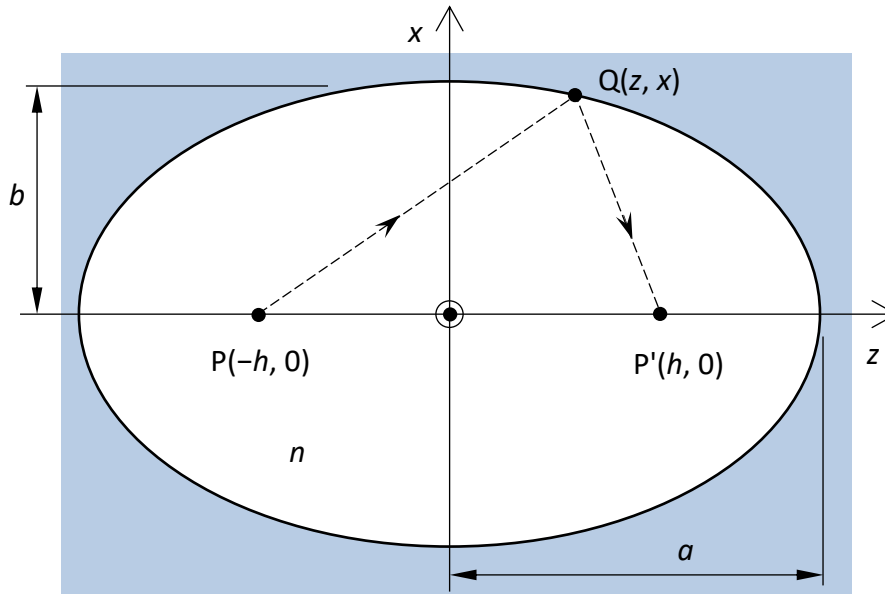
$$\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad \text{és} \quad \sin(\theta') = \frac{x' - x}{\sqrt{(x' - x)^2 + z'^2}} \quad (4)$$

Ezeket beírva (3)-ba:

$$n \cdot \sin(\theta) = n' \cdot \sin(\theta'). \quad (5)$$

2. Fermat-elv alkalmazása: leképezés ellipszoidtükörrel

Az ellipszoid tükörről közismert, hogy az egyik fókuszában (P) lévő pontforrást geometriai optikai értelemben tökéletesen leképezi a másik fókuszába (P'). A Fermat-elv segítségével igazoljuk ezt az állítást az x-szimmetriatengelytől azonos távolságban elhelyezkedő P és P' pontok esetén.



A Fermat-elv értelmében az *OPL* egyenlő minden PQP' út mentén:

$$OPL(PQP') = n\sqrt{(z+h)^2 + x^2} + n\sqrt{(h-z)^2 + x^2}, \quad (6)$$

ahol legyen $n = 1$. Mivel minden út egyenlő, *OPL* értékét könnyen meghatározhatjuk a z-tengely mentén haladó fényterjedéssel:

$$OPL = n((a+h) + (a-h)) = n2a, \quad (7)$$

Vagyis (6)-ból ez lesz (n kiesik):

$$\sqrt{(z+h)^2 + x^2} + \sqrt{(h-z)^2 + x^2} = 2a, \quad (8)$$

(8)-at átrendezve és négyzetreemelve:

$$(h-z)^2 + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(z+h)^2 + x^2} + ((z+h)^2 + x^2), \quad (9)$$

$$a^2 + hz = a\sqrt{(z+h)^2 + x^2}, \quad (10)$$

$$a^4 + 2a^2hz + h^2z^2 = a^2(z+h)^2 + a^2x^2, \quad (11)$$

$$a^4 + 2a^2hz + h^2z^2 = a^2z^2 + 2a^2hz + a^2h^2 + a^2x^2, \quad (12)$$

$$a^4 + h^2z^2 = a^2z^2 + a^2h^2 + a^2x^2, \quad (13)$$

$$a^2 + \frac{h^2z^2}{a^2} = z^2 + h^2 + x^2, \quad (14)$$

Átrendezve és csoportosítva a tagokat:

$$a^2 - h^2 = z^2 \frac{a^2 - h^2}{a^2} + x^2, \quad (15)$$

Ebből már látszik, hogy egy ellipszis egyenletét kaptuk. Ekkor viszont az a , b és h mennyiségek nem függetlenek. Az x-tengelyen lévő Q pont esetén $x = b$:

$$OPL = n2\sqrt{h^2 + b^2} = n2a \rightarrow b^2 = a^2 - h^2 \quad (16)$$

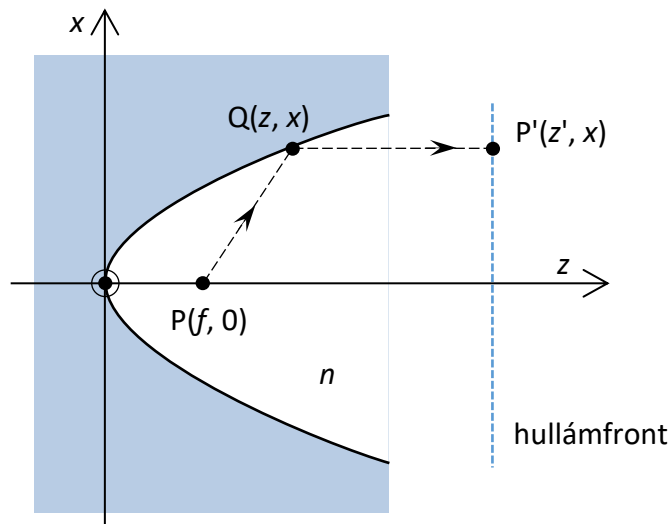
(16) alapján valóban egy ellipszis egyenletét kapjuk:

$$b^2 = z^2 \frac{b^2}{a^2} + x^2, \quad (17)$$

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (18)$$

3. Fermat-elv alkalmazása: leképezés paraboloidtükörrel

A parabolatükör geometriai optikai értelemben tökéletesen képezi le az optikai tengelyén végtelen távolságban lévő pontforrást a fókuszpontjába és viszont. A Fermat-elv segítségével ellenőrizzük ezt az állítást. Legyen a tárgypont a fókuszban (P). Mivel végtelen távoli képpontig kényelmetlen fénysugarat elvezetni, ezért bontsuk ketté az *OPL* számolást. Vegyük fel a képpont felé tartó egyik olyan hullámfrontot, amely a tükör közelében van. A képpont végtelen távol helyezkedik el, tehát e hullámfront sík felület. Ettől a síktól (P') a képpontig mért összes fénysugár esetén egyforma az optikai úthossz, tehát az *OPL* számolásban ez egy konstans tagot jelent, amitől eltekinthetünk. Elegendő tehát csak a tárgyponttól a sík hullámfrontig vizsgálni az optikai úthosszat a PQP' pálya mentén. Mivel a képpont a végtelenben van, a QP' szakasz párhuzamos a z-tengellyel (optikai tengely).



$$OPL(PQP') = n\sqrt{(z-f)^2 + x^2} + n(z' - z), \quad (19)$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $z' = f$ és $n = 1$. Ekkor

$$OPL = \sqrt{(z-f)^2 + x^2} + (f - z), \quad (20)$$

Ha a z-tengely mentén vizsgáljuk a fénysugarat:

$$OPL = 2f. \quad (21)$$

Mivel minden optikai úthossz egyforma:

$$\sqrt{(z-f)^2 + x^2} + (f - z) = 2f, \quad (22)$$

$$(z-f)^2 + x^2 = (f+z)^2, \quad (23)$$

$$z^2 - 2zf + f^2 + x^2 = f^2 + 2fz + z^2, \quad (24)$$

$$x^2 = 4fz, \quad (25)$$

$$z = \frac{x^2}{4f}. \quad (26)$$

4. Gömbtükör paraxiális közelítésben – kiegészítő gondolat

A parabolatükör alapján könnyen megérthető, miért fókuszálnak a gömbtükörök, bár geometriai optikailag tökéletes leképezést csak paraxiális közelítésben képesek produkálni (ld. később). Vizsgáljuk meg tehát egy gömbtükör fókusztávolságát paraxiális közelítésben (azaz közel az optikai tengelyhez). Az origón áthaladó, R sugarú és $z_0 = +R$ középpontú gömb felülete az x - z síkban:

$$x^2 + (z - R)^2 = R^2. \quad (27)$$

Paraxiális közelítésben, azaz ha $x \ll R$:

$$z = R \pm \sqrt{R^2 - x^2} = R - R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \approx R - R \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2\right), \quad (28)$$

Ahol Taylor-soros közelítést alkalmaztunk. R előjele definíció szerint akkor pozitív, amikor a középpontja pozitív irányban van eltolva a z -tengely mentén. Azaz:

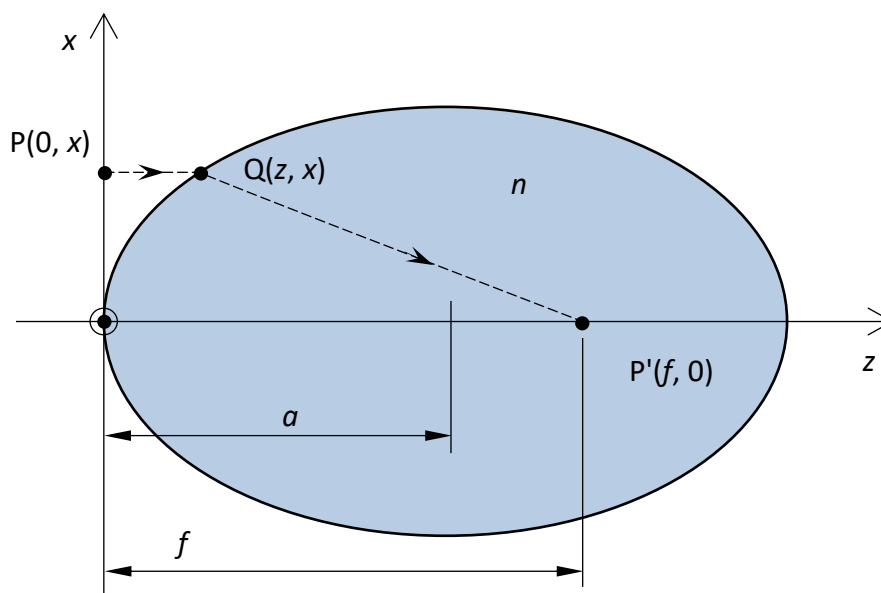
$$z \approx \frac{x^2}{2R}. \quad (29)$$

Ezt összevetve (26)-al megkapjuk a gömb érintőparabolájának fókusztávolságát:

$$f = \frac{R}{2}. \quad (30)$$

5. Fermat-elv alkalmazása: leképezés ellipszoidlencsével

A Fermat-elv segítségével határozzuk meg, hogy milyen alakú hengersizmetrikus lencsefelület képezi le a tengelyén lévő, végtelen távoli tárgypontra geometriai optikailag tökéletesen a P' fókuszpontba. Az OPL számítást itt is a tárgypontra egyik sík hullámfrontjától végezzük (P), amely legyen a $z = 0$ pozícióban. A PQ szakasz most is párhuzamos a z -tengellyel (optikai tengely).



Vizsgáljuk meg az optikai úthosszat az x - z síkban elhelyezkedő sík hullámfronthoz képest:

$$OPL(PQP') = z + n\sqrt{x^2 + (f - z)^2}. \quad (31)$$

Az optikai tengelyen:

$$OPL(PQP') = nf. \quad (32)$$

A Fermat-elv alapján minden PQP' optikai úthossz egyenlő:

$$z + n\sqrt{x^2 + (f - z)^2} = nf, \quad (33)$$

$$n^2(x^2 + (f - z)^2) = (nf - z)^2, \quad (34)$$

$$n^2x^2 + n^2f^2 - n^22fz + n^2z^2 = n^2f^2 - 2nfnz + z^2, \quad (35)$$

Balra rendezve minden x-et, jobbra mindent z-t tartalmazó tagot:

$$n^2x^2 = (1 - n^2)z^2 + 2nfnz(n - 1), \quad (36)$$

$$n^2x^2 = (1 - n^2)z^2 - 2nfnz(1 - n). \quad (37)$$

A jobb oldalt teljes négyzetté alakítva:

$$n^2x^2 = (1 - n^2) \left(z - \frac{nf(1 - n)}{1 - n^2} \right)^2 - \frac{n^2f^2(1 - n)^2}{1 - n^2}, \quad (38)$$

$$n^2x^2 = (1 - n^2) \left(z - \frac{nf}{1 + n} \right)^2 - \frac{n^2f^2(1 - n)}{1 + n}, \quad (39)$$

$$\frac{n^2x^2}{1 - n^2} = \left(z - \frac{nf}{1 + n} \right)^2 - \frac{n^2f^2}{(1 + n)^2}, \quad (40)$$

Balra rendezve minden x, z-t tartalmazó tagot, jobbra a konstans:

$$\frac{n^2x^2}{n^2 - 1} + \left(z - \frac{nf}{1 + n} \right)^2 = \frac{n^2f^2}{(1 + n)^2}. \quad (41)$$

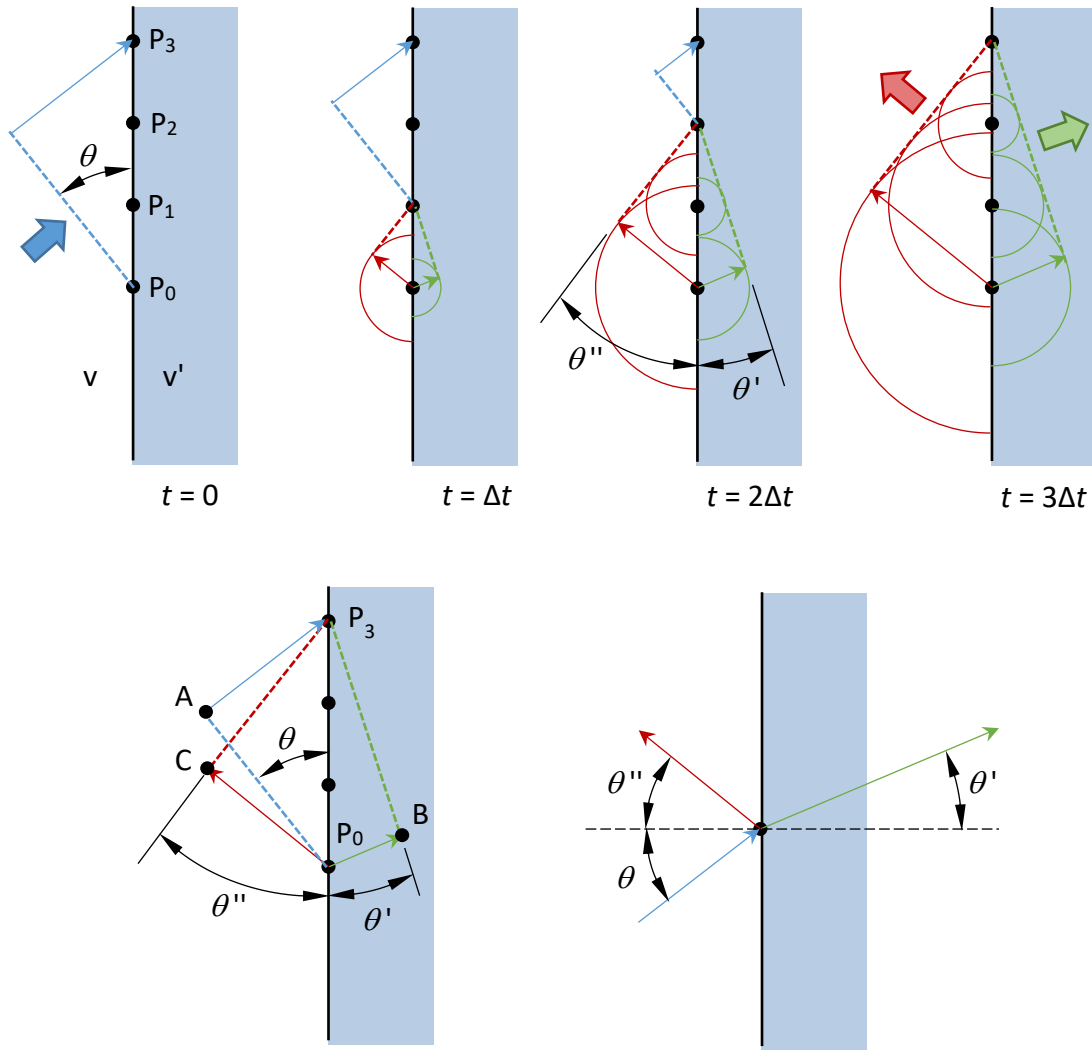
Mindkét oldalt elosztva a jobb oldallal egy ellipszis egyenletét kapjuk:

$$\frac{x^2}{\frac{n - 1}{n + 1}f^2} + \frac{\left(z - \frac{nf}{1 + n} \right)^2}{\frac{n^2f^2}{(1 + n)^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(z - a)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (42)$$

Ebből az ellipszis nagy féltengelye (a):

$$a = \frac{nf}{1 + n}. \quad (43)$$

6. Huygens-elv alkalmazása: fénytörés és tükrözés törvényei – kiegészítés



$$v' < v ; \overline{AP_3} = v \cdot 3\Delta t ; \overline{P_0B} = v' \cdot 3\Delta t ; \overline{P_0C} = v \cdot 3\Delta t \quad (44)$$

$$\sin(\theta) = \frac{\overline{AP_3}}{\overline{P_0P_3}} ; \sin(\theta') = \frac{\overline{P_0B}}{\overline{P_0P_3}} ; \sin(\theta'') = \frac{\overline{P_0C}}{\overline{P_0P_3}} \quad (45)$$

$$\frac{\sin(\theta)}{v \cdot 3\Delta t} = \frac{1}{\overline{P_0P_3}} ; \frac{\sin(\theta')}{v' \cdot 3\Delta t} = \frac{1}{\overline{P_0P_3}} ; \frac{\sin(\theta'')}{v \cdot 3\Delta t} = \frac{1}{\overline{P_0P_3}} \quad (46)$$

$$\sin(\theta) = \sin(\theta'') ; \frac{\sin(\theta)}{v} = \frac{\sin(\theta')}{v'} \quad (47)$$

Ha bevezetjük az $n = c/v$ és $n' = c/v'$ törésmutatókat:

$$\theta = \theta'' ; n \cdot \sin(\theta) = n' \cdot \sin(\theta') . \quad (48)$$