

OPTIKA

A fizikai optika alapjai

Dr. Erdei Gábor, egyetemi docens

erdei.gabor@ttk.bme.hu



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar, Atomfizika Tanszék

v. 2026.03.05.

TARTALOMJEGYZÉK

TARTALOMJEGYZÉK.....	2
1. BEVEZETŐ, FÉNYMODELLEK	5
1.1. Tudománytörténet, fénymodellek, technikai fejlődés	5
1.2. Fermat-elv (a „legrövidebb idő” elve)	7
1.3. Huygens-elv	8
1.4. Young-féle kétréses kísérlet	9
1.5. Huygens-Fresnel elv	9
2. A FÉNY ELEKTRODINAMIKAI MODELLEZÉSE	11
2.1. Izotróp, lineáris közegek elektrodinamikai leírása	11
2.2. EM hullámterjedés dielektrikumokban	12
2.3. Hullámterjedés véges vezetőképességű anyagban	13
2.4. Amikor $k_{im} \parallel k_{re}$, pl. ha egy vezető anyag felületére merőlegesen esik be a fény	17
2.5. Energiaterjedés EM hullámokban	19
2.6. Mit tehet ma egy fizikus a diplomájával az optika területén?	20
3. SÍKHULLÁMOK VISELKEDÉSE SÍK HATÁRFELÜLETEN	21
3.1. Polarizációs sajátállapotok síkhullám-síkfelület találkozásánál	21
3.2. Kontinuitási feltételek két dielektrikum határán.....	22
3.3. S-polarizáció, azaz E merőleges a beesési síkra	23
3.4. P-polarizáció, azaz E párhuzamos a beesési síkkal	24
3.5. A Fresnel-formulák diszkutálása	25
3.6. A teljesítményviszonyokra vonatkozó Fresnel-formulák	26
3.7. Brewster-effektus.....	28
3.8. Teljes belső visszaverődés (totálreflexió): $n' < n$	28
3.9. Síkhullám törése sík dielektrikum/fém határfelületen (kiegészítő anyag)	30
4. A GEOMETRIAI OPTIKA ELMÉLETI ALAPJAI	33
4.1. A felhasznált közelítések	33
4.2. Alapvető megfontolások	33
4.3. Lassan változó amplitúdójú közelítés	34
4.4. A geometriai optika alapegyenlete, érvényességi feltételek.....	35
4.5. Lokális síkhullámú közelítés.....	36
5. FÉNYTERJEDÉS MODELLEZÉSE SUGÁROPTIKAI ESZKÖZÖKKEL.....	39
5.1. Fázisviszonyok leírása a geometriai optikában.....	39
5.2. Energetikai viszonyok leírása a geometriai optikában.....	40
5.3. A geometriai optika intenzitástörvénye	41
5.4. A fénysugarak egyenlete ívhossz szerinti paraméterezésben	41
6. A GEOMETRIAI OPTIKA PARAXIÁLIS KÖZELÍTÉSE	45
6.1. Elsőrendű (paraxiális) közelítés (Gauss-optika)	45
6.2. Képszerkesztés vékonylencse esetén, paraxiális képalkotás jellemzői.....	47
6.3. Ideális leképezés összetett optikai rendszerrel	48
6.4. Összetett lencserendszerek tárgyalása fősíkok segítségével.....	49
7. KÉTHULLÁMÚ INTERFERENCIA	51
7.1. Az interferencia fogalma	51
7.2. Két síkhullám interferenciája paraxiális közelítésben.....	54
7.3. Az interferenciacsíkok láthatósága.....	56
7.4. Példa: síkpárhuzamos lemez	57
7.5. Hová lesz a fény amplitúdóosztó interferométerekben?	58
7.6. Nagyszögű interferencia (kiegészítő anyag)	60

8. TÖBBHULLÁMÚ INTERFERENCIA	63
8.1. „N” db síkhullám interferenciája (többhullám interferencia).....	63
8.2. Diffrakciós rács	65
9. SKALÁR DIFFRAKCIÓ.....	69
9.1. Alapfogalmak, diffrakciós modellek, Green-tétel	69
9.2. Helmholtz és Kirchhoff integráltétele	71
9.3. Fresnel-Kirchhoff-diffrakciós integrál	72
10. A FRESNEL-KIRCHHOFF INTEGRÁL KÖZELÍTŐ FORMULÁI	75
10.1. Közeltéri közelítés (Huygens-Fresnel-integrál)	75
10.2. Paraxiális közelítés (Fresnel-diffrakció)	75
10.3. Távoltéri közelítés (Fraunhofer-diffrakció).....	76
10.4. Fraunhofer-diffrakció felhasználása	78
10.5. Fresnel-diffrakció felhasználása	80
10.6. Fraunhofer-diffrakció alkalmazása: távcső felbontóképessége	82
10.7. Fresnel-diffrakció alkalmazása: mikroszkóp felbontóképessége (kieg. any.)	82
10.8. Rés Fraunhofer-diffrakciós téreloszlása (kiegészítő anyag).....	83
11. STATISZTIKUS OPTIKA – IDŐBELI KOHERENCIA.....	85
11.1. Bevezetés – a koherencia fogalmának kialakulása	85
11.2. Kéthullámú interferencia két frekvencia esetén	87
11.3. Kéthullámú interferencia több frekvenciát tartalmazó rezgés esetén	91
12. AZ IDŐBELI KOHERENCIA VIZSGÁLATA IDŐTARTOMÁNYBAN.....	93
12.1. Kvázimonokromatikus hullámok	93
12.2. Kvázimonokromatikus rezgés koherenciafüggvénye.....	94
12.3. Időben statisztikus viselkedés leírása az autokorrelációs fgv. segítségével.....	96
12.4. A koherencia fogalma, fajtái.....	98
13. POLARIZÁCIÓ	101
13.1. A fény polarizációs természete	101
13.2. Jones-vektoros reprezentáció	104
13.3. Anizotróp optikai elemek leírása Jones-mátrixokkal	105
13.4. Polarizálatlan komponens is tartalmazó fény (kieg. anyag)	106
14. SÍKHULLÁMOK TERJEDÉSE ANIZOTRÓP KÖZEGBEN	107
14.1. A térerősségvektorok kölcsönös helyzete	107
14.2. Fázis- és sugársebesség	109
14.3. Fresnel-féle sebességi törvény	109
14.4. Indexellipszoid.....	112
14.5. Kristálytani alapismeretek.....	114
14.6. Egytengelyű kettőtörés.....	114
14.7. Fáziskésleltető lemezek.....	116
14.8. További anizotróp jelenségek (kieg. anyag)	116
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS.....	117
HIVATKOZÁSJEGYZÉK	117

1. BEVEZETŐ, FÉNYMODELLEK

Források: [1], [2], [3], [4] + wikipedia

Mivel foglalkozik az optika?

- Fény terjedésével (elektromágneses, EM, hullámok λ : $10^{-4}..10^{-9}$ m, azaz 100 μm .. 1 nm)
- Fény-anyag közötti kölcsönhatásokkal (pl. nemlineáris optika)
- Fény keletkezésével, elnyelődésével (pl. kvantumoptika)

1.1. Tudománytörténet, fénymodellek, technikai fejlődés

Asszíria	i.e. 1000	tükrök, gyújtólencsék (pl. Nimrud-lencse? – csiszolt kristály)
Euklidész	i.e.280	„Optika” fény $\equiv$ látás (sugarak a szemből erednek, <u>egyenes vonalban</u> terjednek és a tárgyakkal kölcsönhatásban vannak, egy pontba csak egy sugár megy a szemből) $c = \infty$; tükrözési törvény
Héron (Alexandria)	1.sz.	„Catoptrics” egyik pontból a másikba a legrövidebb úton terjednek; visszaverődés (megszerkesztette, igazolta a legrövidebb út alapján)
Ptolemaiosz	2.sz.	törési törvény (kísérleti úton) $\theta' = a \cdot \theta - b \cdot \theta^2 \leftarrow$ kis szögben OK!
Szidon (Főnicia)	2. sz.	színtelen üveg (mangán használata színtelenítésre)
Alhazen (Bagdad)	11.sz.	Abu Ali al-Hasan <i>ibn al-Haitham</i> ; fény: fényforrásból ered a szem csak „detektor”; szem modell: camera obscura elve alapján; részecske modell (törés/tükrözés felületi erőhatások következménye); <u>véges</u> és <u>sűrűségfüggő</u> sebesség
Velence	13. sz.	víztisztá üveg, ónfoncsoros tükör
Roger Bacon	13. sz.	nagyító lencse, utána: szemüveg Olaszországban (Firenze, 1280)
Hans és Zacharias Janssen	1600	mikroszkóp
Leonard Digges, Hans Lipperhey	1608	távcső (Anglia, Hollandia), Galileo Galilei tudományos megfigyelései kb. 1609-től
Johannes Kepler	1609 1611	„Dioptrice”, saját közelítés a törési törvényre, totálreflexió, fókusz definíció Kepler-távcső
Cristoph Scheiner	1619	a szem anatómiája, a kép a retinán keletkezik
René Descartes	1637	„La Dioptrique”; <u>elasztikus közeg</u> - <u>éter</u> , benne mintha teniszlabdák <u>mechanikus mozgást</u> végeznének; hibás töréshipotézis: sebesség párh. komp. megmarad: $v' \cdot \sin \theta' = v \cdot \sin \theta$ (az impulzus ekkor még nem ismert fogalom); fénysebesség anyagfüggő (tőle függetlenül Willebrod Snell is megtalálta 1621-ben), Descartes-felületek, szem működése, szivárvány magyarázat, $c \approx \infty$
Francesco Maria Grimaldi	1650	„diffrakció” megfigyelése árnyék szélén (az elnevezés is tőle ered), a fényt folyadék hullámzásához hasonlítja (éter hullámzásai)
Pierre de Fermat	1657	a természet a legkönnyebbet választja: legrövidebb idő elve, „optikai ellenállás” $\rightarrow$ <u>véges sebesség</u> , törési törvény újabb levezetése $\rightarrow$ eszerint a fény üvegben lassabban terjed mint levegőben
Robert Hooke	1665	„Micrographia”, irizálás megfigyelése (színes minták színtelen anyagokon: toll, kagylóhéj); tőle függetlenül Robert Boyle is felfedezte; Hooke a fényt rezgésnek tette fel (1666 – Newton színbontása és összegzése)
Isaac Newton	1672	tükrös távcső
Olaf Rømer	1675	fénysebesség mérése 24% pontossággal Jupiter holdak alapján (tulajdonképpen a Doppler-effektust használta, mert a Föld sebessége miatt folytonosan nő vagy csökken a Jupiter-Föld távolság) 1728-ban James Bradley távcsöves méréssel igazolta – „aberráció”

Christian Huygens (v. Huyghens)	1679	éter (finom, rugalmas anyag), benne mint elasztikus hullám (inkább impulzusnak gondolta, mert hullámhossz szerinti periodicitásról nem írt) terjed a fény (előbb publikálta mint Newton, mégis több mint 100 év múlva hitték el!), egymást lökdöső golyócskák, elemi gömbhullámok – összhangban van Fermat-elvével
Isaac Newton	1704	„Opticks”; 100 évre bebetonozta a részecskemodellt, szín: részecske mérete; fehér fény = <u>színek összege</u> („spektrum” elnevezés tőle ered); Newton-gyűrűk
Chester Moore Hall	1750	akromatikus dublet (fókusz távolság hullámhossz-függésének korrigálására)
Thomas Young	1801	interferencia kísérlet és magyarázat (útkülönbség számít) → térbeli koherencia; a fény <u>periodikus hullám</u> ; a színek köze van a hullámhosszhoz (vékonyrétegek színének magyarázata); <u>szemlencse akkommodációja, színlátás alapjai</u>
Étienne-Louis Malus	1809	„polarizáció” (Bartholinus 1669-ben kimutatta kalcittal a kettőtörést, amit Huygens és Newton is vizsgált korábban); megállapította, hogy a reflektált és szórt fény is polarizált; a kifejezés tőle származik
Joseph von Fraunhofer	1814	<u>spektroszkóp feltalálása</u> ; a Nap színekében lévő <u>spektrumvonalak felfedezése és leírása</u> (William Hyde Wollaston is felfedezte 1804-ben)
Thomas Young	1817	<u>transzverzalizálás</u> (Dominique François Arago polarizált fénnel végzett kísérletei nyomán), lineáris polarizáció
Augustin Jean Fresnel	1818	diffrakciós kísérletek → fény hullámelméletének matematikai leírása; transzverzalizálás miatt az éter nem lehet folyékony csak szilárd; diszperzió magyarázata az anyag részecskeszerkezte alapján; kristályoptika
Louis Mande Daguerre	1839	fémlemezeire történő fotózás
Petzvál József	1840	nagy fényerejű portréobjektív (képmezőhajlás csökkentése)
Christian Doppler	1842	mozgó fényforrás (csillag) színének megváltozása (Doppler-effektus)
Jean Bernard Léon Foucault	1850	fénysebesség mérése vízben, levegőben (vízben lassabb): részecskeelm. $\emptyset$
Armand Hypolite Louis Fizeau	1851	a fényt a mozgó anyag részben magával ragadja (Fresnel feltételezése nyomán), folyó vízzel demonstrálta → speciális relativitás elmélet
Kohlrausch & Weber	1856	az EM hullám sebességének megmérése = fénysebesség
Robert Wilhelm Bunsen Gustav Kirchhoff	1861	<u>prizmás spektroszkóp</u> , a Nap spektrumvonalainak magyarázata: <u>abszorpció, emisszió</u> → <u>spektrumanalízis</u> (majd kvantummechanika)
Armand Hypolite Louis Fizeau	1862	<u>interferogram láthatóságának vizsgálata</u> (→ időbeli koherencia)
James Clerk Maxwell	1862	elektromágneses hullámelmélet (Michael Faraday nyomány)
Thomas Alva Edison	1879	<u>működőképes izzólámpa</u> (első demonstráció: 1802, Humphry Davy)
Abbe-Schott-Zeiss	1884	<u>optikai üveggyártás beindítása</u>
Michelson és Morley	1887	interferométeres kísérlet → <u>nincs abszolút éter?</u> ; $c' = c + v$?
Heinrich Hertz	1888	a fény <u>elektromágneses</u> hullám – kísérleti bizonyíték (állóhullámú kísérletek EM rádióhullámmal @ 55 MHz → sebesség, polarizáció)
Harold Dennis Taylor	1892	<u>savas eső és napfény hatására szennyeződött lencsén ZnO vékonyréteget fedezett fel, ami némileg csökkentette a reflexiót</u>
Max Planck	1900	feketetest sugárzás, <u>EM tér kvantált</u> : $\Delta E = h \cdot \nu$
Willem De Sitter	1913	kettőscsillagok vizsgálata → <u>c független a fényforrás sebességétől</u> → ← Newton mechanika (speciális relativitáselmélet alátámasztása)
Albert Einstein	1905	fotoelektromos hatás; részecske modell (foton); speciális relativitás-elmélet → mozgó testek és fény kölcsönhatása
	1917	<u>indukált emisszió</u>
Gábor Dénes	1947	hologram elve
Theodore H. Maiman	1960	<u>lézer</u>

1. táblázat. Az optika elméleti és technológiai területeinek rövid története.

1.2. Fermat-elv (a „legrövidebb idő” elve)

Héron már az i.sz. I. században megfogalmazta a tükröződés törvényeit. Az ő elképzelése az volt, hogy a fény visszaverődéskor azon az úton terjed, amelyik geometriailag a legrövidebb. A különböző terjedési sebességek miatt ez a megfontolás törőközegekre viszont nem használható. A XVII. században Fermat-nak sikerült az általánosítást megtennie. A Fermat-elv eredeti megfogalmazásában: a fény két pont között azon az útvonalon terjed, amelyiket a *legrövidebb idő* alatt tudja megtenni. Ez nem törvény, hanem hasznos eszköz a fény útjának számolására, szemléltetésére. Mivel a *terjedési út* fogalma általános fénynyaláb (tehát nem pl. gömb- vagy síkhullám) esetén csak geometriai optikai környezetben értelmezhető, a Fermat-elv is csupán geometriai optikai közelítésben használható.

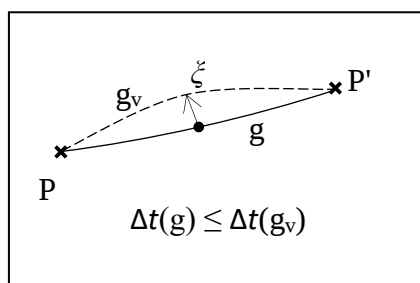
Fermat feltételezte, hogy a sűrűbb közegek jobban akadályozzák a fény terjedését mint a ritkábbak, és az anyagok e tulajdonságának jellemzésére bevezette az „optikai ellenállás” fogalmát. Az ennek megfelelő korszerű terminológia a *törésmutató* (n):

$$n \triangleq \frac{c}{v}, \quad (1)$$

ahol c a vákuumban és „ v ” az adott közegben mért fénysebesség egy síkhullám esetén. Ennek nagysága miatt az optikai műszerekre jellemző távolságokat a fény igen rövid idő alatt teszi meg, így a Fermat által bevezetett „legrövidebb idő” gyakorlati alkalmazása nem praktikus. Mivel az eltelt idő arányos a megtett úttal (differenciálisan), vizsgálhatjuk az idő helyett az utat is. Csakhogy a fény különböző törésmutatójú közegekben eltérő távolságot tesz meg azonos idő alatt. A tárgyalás az *optikai úthossz* (optical path length, *OPL*) bevezetésével egyszerűsíthető le:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \int_P^{P'} dt ; OPL \triangleq c \cdot \Delta t = \int_P^{P'} c dt ; v = \frac{dl}{dt} \Rightarrow \\ dt &= \frac{dl}{v} ; OPL = \int_P^{P'} \frac{c}{v(\mathbf{r})} dl = \int_P^{P'} n(\mathbf{r}) dl \end{aligned} \quad (2)$$

Az optikai úthossz arányos a fény P pontból P' -be jutásának idejével: definíció szerint ez az a távolság, amit a fény vákuumban ugyanannyi idő alatt tesz meg, mint ami alatt P -ből P' -be eljut. A Fermat-elv ebben a megfogalmazásban: a fény két pont között azon a pályán terjed, amely mentén legkisebb az optikai úthossz. Ez egy speciális megfogalmazás, ami ún. *reguláris* tartományokban érvényes, melyekben nincsenek egymást keresztező fénysugarak.



1. ábra. A Fermat-elv magyarázata a pályagörbe variálásával.

Teljesen általános, azaz a fényterjedés geometriai törvényeivel (a fénysugarak pályáit leíró differenciálegyenletekkel) pontosabb összhangot mutató modern megfogalmazás szerint: a fény két pont között olyan úton terjed (g), amelyet ha kis mértékben megváltoztatunk egy, a pályagörbére jellemző ξ paraméter függvényében, akkor az új pályán (g_v) mért OPL első rendben nem különbözik az eredetitől (esetleg csak másod- vagy magasabb rendű változások lépnek fel). Matematikailag megfogalmazva a valódi terjedési út ξ függvényében elsőrendben stacionárius:

$$\left. \frac{dOPL}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} = 0 \quad (3)$$

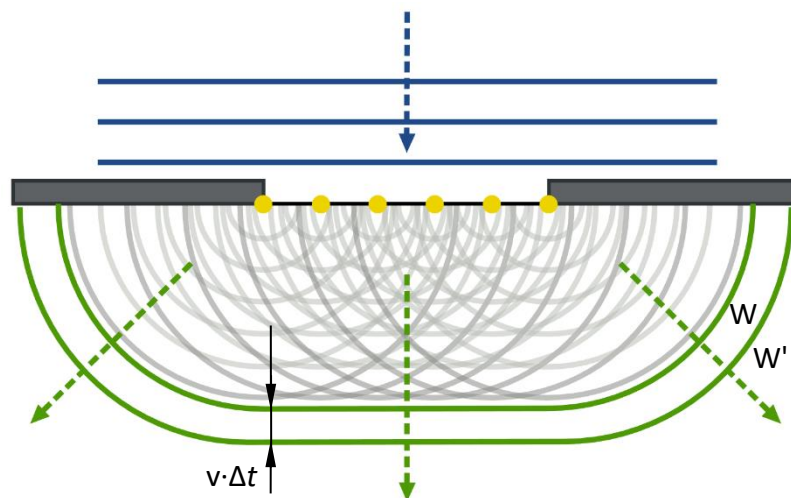
Azaz a valóságos pálya lehet: minimális idejű
maximális idejű
inflexióval rendelkező
azonos idejű minden környező útvonallal.

A Fermat-elv segítségével pontosan le lehetett írni a fénytörés, tükrözés törvényeit, a tükrök és lencsék fókuszáló hatásának jellemzőit stb. További jelentősége abban áll, hogy ez adta az első lökést a *variációszámítás* kialakulásának.

1.3. Huygens-elv

A hullámfront minden pontja új elemi gömbhullámok kiindulópontja. Az új hullámfront úgy határozható meg, hogy megszerkesztjük az elemi hullámok burkolófelületét.

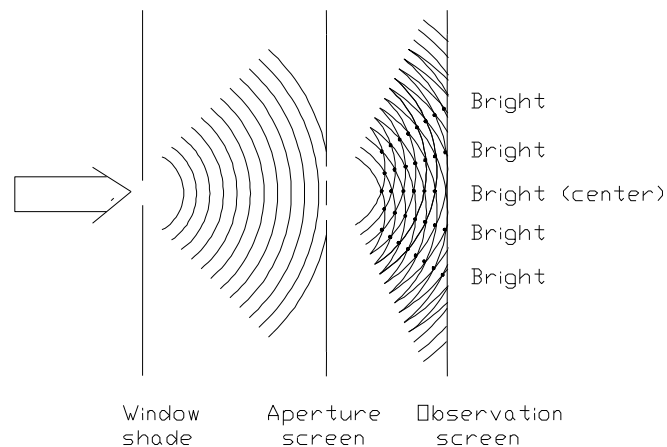
Példa: síkhullám terjedése apertúrán keresztül



2. ábra. A Huygens-elv szemléltetése. W - hullámfront t időpontban, W' - új hullámfront $t + \Delta t$ időpontban. https://en.wikipedia.org/wiki/Huygens%E2%80%93Fresnel_principle

Feltételezés: a hátrafelé haladó hullámok burkolóját nem kell figyelembe venni (ezt egyszerűen kimondja az elv, mivel csak így magyarázható, hogy nem terjed a hullám visszafelé is.) W'-n megismételve az előző szerkesztést, újabb W'' burkoló határozható meg. Itt van a hullámfront a $t+2\Delta t$ időpontban.

1.4. Young-féle kétréses kísérlet



3. ábra. A Young-féle kétréses kísérlet vázlata.

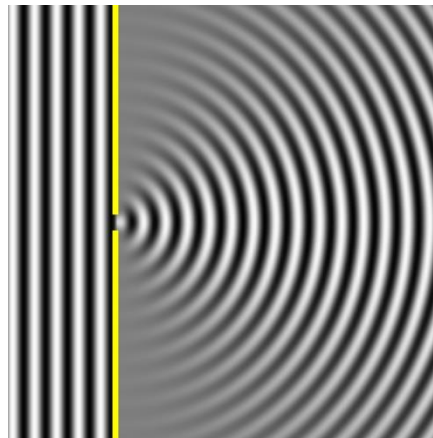
Azokban a pozíciókban, ahol a hullámok azonos fázisban vannak intenzitás-maximumokat tapasztalunk (ha az úthosszkülönbség λ egész számú többszöröse), emiatt fényes vonalak alakulnak ki a térben. Young továbbá megadta a színes vékonyrétegek (pl. szappanbuborék, olajfolt vízen) működésének fizikai magyarázatát, és Newton vékony lemezeken végzett interferencia kísérletei alapján meghatározta λ értékét különböző színű fényekre.

Huygens-burkoló görbéje nem magyarázta a diffrakciót és interferenciát.

Young + Fresnel: interferencia magyarázata hullámelmélettel.

1.5. Huygens-Fresnel elv

A hullámfront minden pontja új elemi hullámok kiindulópontja. A fényjel (zavar) értékét a tér egy tetszőleges pontjában úgy kapjuk meg, hogy szuperponáljuk az elemi hullámokat (később a diffrakcióelméletben ennek pontosabb matematikai leírását is megadjuk).



4. ábra. Diffrakció következtében a fény bejut az árnyékszónába is (forrás: wikipedia).

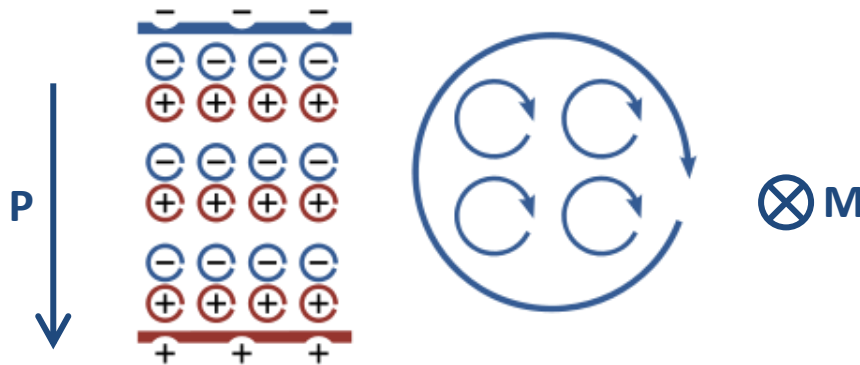
2. A FÉNY ELEKTRODINAMIKAI MODELLEZÉSE

2.1. Izotróp, lineáris közegek elektrodinamikai leírása

Maxwell az elektromos térerősség (**E**) és a mágneses indukció (**B**) törvényszerűségeit összefoglaló híres egyenleteit ún. mikroszkopikus formában fogalmazta meg. Ezek megoldásához minden, az adott rendszerben jelenlévő áramot és töltés figyelembe kell venni, legyenek akár atomi szintűek is. Az optikában a mikroszkopikus töltések-áramok azért fontosak, mert ezek határozzák meg a fény-anyag kölcsönhatások jellemzőit. Azonban a mikroszkopikus leírásmód megoldhatatlan összetettségű egyenletrendszert eredményez, így más megközelítésre van szükség.

Optikai frekvenciákon ($\nu \approx 10^{14}$ Hz) az EM sugárzás hullámhossza ($\lambda = 100\text{-}1000$ nm) nagyságrendekkel nagyobb az atomi méreteknél (rácsperiódus $\approx 0,1$ nm). Ez azt jelenti, hogy az egyes atomok elektronburkáiban jelen lévő mikroszkopikus áramok és töltések hatását sok atomra kiterjedő tartományokra kiátlagolhatjuk, hiszen még ezen tartományok is jóval kisebbek mint a fény hullámhossza.

A mikroszkopikus töltések és áramok kiátlagolásának magyarázata a következő. Az atomok elektromos térben polarizálódnak, és az elemi dipólusok összességét a **P** dipólmomentum-sűrűséggel (polarizációval) vehetjük figyelembe. Hasonlóan, a mágneses tér rendezi az atomi szinten fellépő köráramok által kiváltott elemi mágneseket (pályamomentum), amit összességében az **M** mágneses dipólmomentum sűrűség (mágnesezettség) foglal magában. A mikroszkopikus áramok/töltések az átlagolási tartomány belsejében kioltják egymást, emiatt makroszkopikusan csak a vizsgált tartomány felületén lévő töltések/áramok hatását érzékeljük. A fentieket szemlélteti az 5. ábra:



5. ábra. A polarizáció és mágnesezettség szemléltetése (forrás: wikipédia).

P és **M** felhasználásával vezettük be elektrodinamikában az alábbi új térjellemzőket:

$$\mathbf{P} \triangleq \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} ; \mathbf{D} \triangleq \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} ; \mathbf{H} \triangleq \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (4)$$

amelyekkel felírhatók az ún. makroszkopikus Maxwell-egyenletek anyagban (**D** a *dielektromos eltolás* és **H** a *mágneses térerősség*). Ezekben ρ és $\mathbf{j}$ már csak a szabad töltések és áramok sűrűségét tartalmazza, ld. (5).

Megjegyzendő, hogy az atomok pályamomentumának olyan nagy a tehetetlensége, hogy optikai frekvenciákon szinte nincs mágneses kölcsönhatás az elektromágneses (EM) tér és az atomok között. Emiatt majdnem mindig igaz hogy $\mu_r = 1$. Ez az oka annak is, hogy az EM hullámok tárgyalásakor általában csak **E**-re írjuk föl az egyenleteket.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \\ \text{II. } \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III. } \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \text{IV. } \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Kitekintések: $\mathbf{P}$ és $\mathbf{E}$ ill. $\mathbf{M}$ és $\mathbf{H}$ összefüggését általában lineáris közelítésben tárgyalják, de általános esetben (pl. nagy térerősségek esetén vagy speciális kristályokban) a polarizáció és mágnesezettség függenek az elektromos ill. mágneses térerősségtől. Inhomogén közegben pedig ε_r , μ_r és a belőlük származtatott n törésmutató helyfüggőek! Az utolsó egyenlet a szabad töltések okozta áram és az elektromos térerősség viszonyát kifejező ún. differenciális Ohm-törvény. Az ebben szereplő σ vezetőképesség $\mathbf{D}$ -hez és $\mathbf{H}$ -hoz hasonlóan makroszkopikus anyagjellemző. A kifejezést klasszikus fizikai közelítésben a Drude-moddal lehet értelmezni (itt nem tárgyaljuk, ld. szilárdtestfizika), amely a vezető anyagok fizikai tulajdonságait szabad töltéshordozók (elektron-gáz, plazma), valamint helyhez kötött iontörzsek kölcsönhatásából származtatja. Az egyenlet ebben a formában csak az elektron-gáz plazmafrekvenciájánál jóval kisebb frekvenciákon igaz ($\omega \ll \omega_p$). Fémeknél a plazmafrekvenciához tartozó hullámhossz $\lambda_p = 70\text{-}80$ nm körül (mélyen az UV tartományban) van, tehát látható sugárzásra a közelítés használható. A plazmafrekvencia körül $\mathbf{j}$ és $\mathbf{E}$ fázisban eltolódhat egymáshoz képest, valamint az anyagjellemzők erős frekvenciafüggést mutatnak. (Plazmafrekvencián $\varepsilon = 0$.)

2.2. EM hullámterjedés dielektrikumokban

Feltevés: $\sigma = 0$, $\rho = 0$ (azaz nincsenek szabad töltések, és az anyag nem vezeti az áramot). Ezekből levezethető az alábbi hullámegyenlet (forrásmentes differenciálegyenletek):

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 ; \nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 ; c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} ; n^2 = \varepsilon_r \mu_r \quad (\text{Maxwell-reláció}) \quad (6)$$

ahol bevezettük a ∇ szimbólummal jelölt a nabla-operátort ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ az egységvektorok):

$$\nabla \triangleq \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} ; \nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (7)$$

és ∇^2 a Laplace-operátor. A részletes levezetést a 2.3. alfejezetben tárgyaljuk. A (6) egyenletek legegyszerűbb megoldása az ω körfrekvenciájú (monokromatikus) síkhullám, melynek alakja komplex jelölésmóddal a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_1)} \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_2)} \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbf{E}_0$ és $\mathbf{B}_0$ vektoramplitúdók itt valós értékűek, azaz a hullámot lineárisan polarizáltnak tekintjük. A polarizáció általános kezelését a 13. fejezetben fogjuk megvizsgálni. A $\mathbf{k}$ hullámszámvektor nagysága a következő alakokban írható fel (diszperziós reláció):

$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{2\pi}{\lambda_0} = n \frac{2\pi}{c \cdot T} = n \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{v} \quad (9)$$

A síkhullámok terjedését leíró (8) egyenleteknél fontos megfigyelni a tér és időfüggést jellemző exponens (azaz a fázis) előjelét. Fizikai megközelítésben a fény a terjedés irányába haladva egyre régebbi időpillanatok fázisát hordozza (késik); ezt nevezik *negatív fázisú* hullámterjedésnek (mivel $\mathbf{k}\mathbf{r}$ negatív). A gyakran alkalmazott másik leírásmódnál (mi is fogjuk használni) az egyenletek komplex konjugáltját veszik, hogy a térbeli terjedés előjele pozitív legyen. Ez az ún. *pozitív fázisterjedési* módszer. Az éppen alkalmazott jelölésrendszer tudatosítása fontos, mert komplex anyagjellemzők esetén komolyan befolyásolja az eredményeket.

A fenti próbafüggvényeket visszahelyettesítve a II. Maxwell-egyenletbe a következőt kapjuk:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}}{\omega} \Rightarrow \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_2)} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_1)}, \quad (10)$$

ami egyszerűsítés után a fázisok egyenlősége miatt csak akkor teljesülhet, ha $\varphi_1 = \varphi_2$. Tehát az EM síkhullám tényleg transzverzális (mivel $\tilde{\mathbf{B}} \perp \tilde{\mathbf{E}} \perp \mathbf{k}$), és $\tilde{\mathbf{E}}$ valamint $\tilde{\mathbf{B}}$ egymással fázisban rezegnek. Lentebb bemutatjuk, hogy abszorbens közegben $\mathbf{k}$ komplex, vagyis ekkor $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

2.3. Hullámterjedés véges vezetőképességű anyagban

Általános esetben a $\mathbf{D}$ és az $\mathbf{E}$ vektorok (valamint $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$) fázisban elcsúszhatnak egymáshoz képest, azaz a dielektromos permittivitás (és az ebből származtatható a hullámszám ill. törésmutató) komplex mennyiségek. Erre mutatunk egy példát, a véges (azaz nem nulla) vezetőképességű anyagok (tipikusan fémek) esetét, amely segítségével értelmezhető, hogy mit jelentenek az újonnan bevezetett komplex anyagjellemzők. Azt továbbra is feltételezzük, hogy $\rho = 0$, és az egyszerűség kedvéért csak $\mathbf{E}$ -re mutatjuk be a hullámegyenlet részletes levezetését.

Az I. Maxwell-egyenletbe behelyettesítjük az áramsűrűség és $\mathbf{E}$ viszonyát kifejező differenciális Ohm-törvényt:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \rightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \rightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}, \quad (11)$$

majd a kapott egyenletet idő szerint differenciáljuk:

$$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (12)$$

A II. Maxwell-egyenletet átalakítjuk:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \rightarrow \frac{\text{rot } \mathbf{E}}{\mu} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \rightarrow \text{rot} \frac{\text{rot } \mathbf{E}}{\mu} = -\text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (13)$$

és behelyettesítjük (12)-be:

$$-\text{rot} \frac{\text{rot } \mathbf{E}}{\mu} = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (14)$$

Felhasználva a $\nabla \times (f \cdot \mathbf{A}) \equiv \nabla f \times \mathbf{A} + f \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ azonosságot ezt kapjuk:

$$-\text{grad} \frac{1}{\mu} \times \text{rot } \mathbf{E} - \frac{1}{\mu} \cdot \text{rot rot } \mathbf{E} = \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (15)$$

Figyelem: μ helyfüggését általános esetben a rotációképzésnél figyelembe kell venni! (Ha a $\mathbf{B}$ -re vonatkozó hullámegyenletet vezetjük le, akkor ε és σ helyfüggését kell vizsgálni.)

$$-\mu \cdot \text{grad} \frac{1}{\mu} \times \text{rot } \mathbf{E} - \text{rot rot } \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (16)$$

mivel $\text{grad}(\mu^{-1}) = -\text{grad}(\mu)/\mu^2$

$$\frac{\text{grad } \mu}{\mu} \times \text{rot } \mathbf{E} - \text{rot rot } \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (17)$$

A gyakorlatban használt optikai anyagok többségére igaz, hogy $\mu = \mu_0 = \text{const.}$, ezért fennáll a következő közelítés (felső becslés):

$$\left| \frac{\text{grad } \mu}{\mu} \times \text{rot } \mathbf{E} \right| \ll |\text{rot rot } \mathbf{E}| \Rightarrow \frac{|\text{grad } \mu|}{\mu} \ll \frac{|\text{rot rot } \mathbf{E}|}{|\text{rot } \mathbf{E}|}, \quad (18)$$

vagyis egyenletünkéből az elhanyagolás után ez lesz:

$$-\text{rot rot } \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (19)$$

Hasonlóan (bár kissé bonyolultabban) levezethető $\mathbf{B}$ -re is:

$$-\text{rot rot } \mathbf{B} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (20)$$

ahol a következő közelítéseket kellett alkalmaznunk (felső becslés):

$$\frac{|\text{grad } \sigma|}{\sigma} \ll \frac{|\text{rot } \mathbf{E}|}{|\mathbf{E}|} \text{ és } \frac{|\text{grad } \varepsilon|}{\varepsilon} \ll \frac{|\text{rot } \mathbf{E}|}{2|\mathbf{E}|}. \quad (21)$$

Mivel $\mu = \text{const.}$, a második feltétel bal oldalát μ -vel bővíthetjük + Maxwell-reláció (6), így:

$$\frac{|\text{grad } n^2|}{n^2} = \frac{2|\text{grad } n|}{n} \Rightarrow \frac{|\text{grad } n|}{n} \ll \frac{|\text{rot } \mathbf{E}|}{4|\mathbf{E}|}. \quad (22)$$

A permeabilitással ellentétben σ és ε_r térben változhat optikai közegek esetén is. Annak érdekében tehát, hogy szemléltessük mit is jelent a fenti feltétel, alkalmazzuk arra az egyszerű esetre, amikor egy (8) alakú síkhullám terjed izotróp közegben. Mivel ilyen közegekben $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$, ezért (22) jobb oldala a következő módon írható:

$$\frac{|\text{rot } \mathbf{E}|}{4|\mathbf{E}|} = \frac{|-i\mathbf{k} \times \mathbf{E}|}{4|\mathbf{E}|} = k \cdot \frac{|\mathbf{E}|}{4|\mathbf{E}|} = \frac{\pi}{2\lambda}, \quad (23)$$

amivel (22) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\frac{|\text{grad } n| \cdot \lambda}{n} = \frac{\Delta n}{n} \ll \frac{\pi}{2}. \quad (24)$$

Ez azt jelenti, hogy hullámhossznyi szakaszon mérve a relatív törésmutatóváltozásnak $\pi/2$ -nél jóval kisebbnek kell lennie. Ez nem teljesül térben nagyon gyorsan változó törésmutatójú struktúráknál, pl. hullámhossz alatti diffrakciós rácsok, szóró közegek esetében. A feltétel sérül emellett különböző anyagok határfelületén is, amit a Maxwell-egyenletek *folytonossági feltételeivel* veszünk figyelembe az elektrodinamikában (ld. később).

A $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ vektorazonosság felhasználásával a (19)-(20) egyenletek így alakulnak át:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \text{grad div } \mathbf{B} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (25)$$

A III.-IV. Maxwell-egyenletek és (21) miatt az egyenletek bal oldalán a második tag mindkét esetben nulla, tehát:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (26)$$

Ezek az egyenletek írják le a hullámterjedést véges vezetőképességgel rendelkező (pl. fémes) anyagokban, kettejüket együtt ún. *távíróegyenleteknek* nevezzük. A fenti egyenletek lineárisak, tehát a harmonikus függvények szintén megoldásai. Vizsgáljuk most csak az ω körfrekvenciájú időfüggést mutató megoldásokat. Komplex jelölésrendszert alkalmazva az ilyen függvények a következő alakban írhatók fel:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t}.\quad (27)$$

Mivel az egyszeres idő szerinti deriválás $i\omega$ -val való szorzásnak felel meg, a hullámegyenlet az időfüggetlen, ún. *Helmholtz-egyenlet* alakot ölti ($\mathbf{B}$ -re hasonlóan):

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \varepsilon\mu\omega^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - i\mu\sigma\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0.\quad (28)$$

Az egyenlet formailag a dielektrikumokban felírható alakú lesz, ha bevezetjük a komplex dielektromos permittivitást ($\varepsilon_{\text{im}} > 0$ elnyeléskor):

$$\tilde{\varepsilon} \triangleq \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_{\text{re}} - i \cdot \varepsilon_{\text{im}} \rightarrow \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \tilde{\varepsilon}\mu\omega^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0.\quad (29)$$

A Helmholtz-egyenlet megoldását lineárisan polarizált síkhullám-alakban feltételezve:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\quad (30)$$

azt kapjuk, hogy:

$$-\mathbf{k}^2 \mathbf{E}_0 + \tilde{\varepsilon}\mu\omega^2 \mathbf{E}_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{k}^2 = \tilde{\varepsilon}\mu\omega^2,\quad (31)$$

azaz a hullámszámvektor komplex:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{k}} &\triangleq \mathbf{k}_{\text{re}} - i \cdot \mathbf{k}_{\text{im}}, \\ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}_{\text{re}}\mathbf{r})} \cdot e^{-\mathbf{k}_{\text{im}}\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (32)$$

A komplex hullámszám tehát $\mathbf{k}_{\text{im}}$ irányában *exponenciálisan csillapodó* téramplitudót jelent. Összefoglalva: a komplex permittivitás és hullámszámvektor azt fejezi ki, hogy az anyag csillapítja a ráeső sugárzást. A csillapítás mértékét a behatolási mélység (δ) jellemzi, amely definíció szerint az a távolság, ahol az amplitudó 1/e-ed részére csökken. A fenti egyenletből:

$$\delta \triangleq \frac{1}{k_{\text{im}}}.\quad (33)$$

Komplex dielektromos permittivitás csak az abszorbens közegekre jellemző (vezető anyagok, vagy erősen elnyelő dielektrikumok), ezzel szemben a hullámszámvektor más esetekben is lehet komplex, mint pl. teljes belső visszaverődés során (tárgyalás a 3. fejezetben).

Abszorbens közegekben a $\tilde{\mathbf{k}}$ komponensei az alábbi egyenlet megoldásával számíthatók ki:

$$\tilde{\mathbf{k}}^2 = (\mathbf{k}_{\text{re}} - i \cdot \mathbf{k}_{\text{im}})^2 = k_{\text{re}}^2 - k_{\text{im}}^2 - i \cdot 2\mathbf{k}_{\text{re}}\mathbf{k}_{\text{im}} = \tilde{\varepsilon}\mu\omega^2, \quad (34)$$

amiből a valós és képzetes részek szétválasztásával és $k_0^2 = \omega^2/c^2$ kiemelésével a következőt kapjuk:

$$k_{\text{re}}^2 - k_{\text{im}}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{re}} \mu c^2 = k_0^2 \varepsilon_{\text{re}} \mu c^2 \quad \text{és} \quad 2\mathbf{k}_{\text{re}}\mathbf{k}_{\text{im}} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{im}} \mu c^2 = k_0^2 \varepsilon_{\text{im}} \mu c^2. \quad (35)$$

Általános esetben $\mathbf{k}_{\text{im}}$ és $\mathbf{k}_{\text{re}}$ nem párhuzamosak (pl. totálreflexió esetén az elhaló hullámnál éppen merőlegesek egymásra). Irányukra a IV. Maxwell-egyenlet ad megkötést, amiből az ω körfrekvenciájú (30) síkhullám esetén a következő feltétel írható fel:

$$\mathbf{E}_0 \cdot \tilde{\mathbf{k}} = 0 \rightarrow \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k}_{\text{re}} = i \cdot \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k}_{\text{im}}. \quad (36)$$

A fenti összefüggés részletes elemzése a [6] tankönyv I. kötet 2.2.2.2 alfejezetében található. Mi a 2.4 alfejezetben csak azt az egyszerű esetet vizsgáljuk, amikor $\mathbf{k}_{\text{im}}$ és $\mathbf{k}_{\text{re}}$ párhuzamosak.

A Maxwell-reláció analógiájára definiálhatjuk a komplex törésmutatót:

$$n^2 = \varepsilon_r \mu_r \rightarrow \tilde{n}^2 \triangleq \frac{\tilde{\varepsilon}\mu}{\varepsilon_0 \mu_0} = \tilde{\varepsilon} \mu c^2, \quad (37)$$

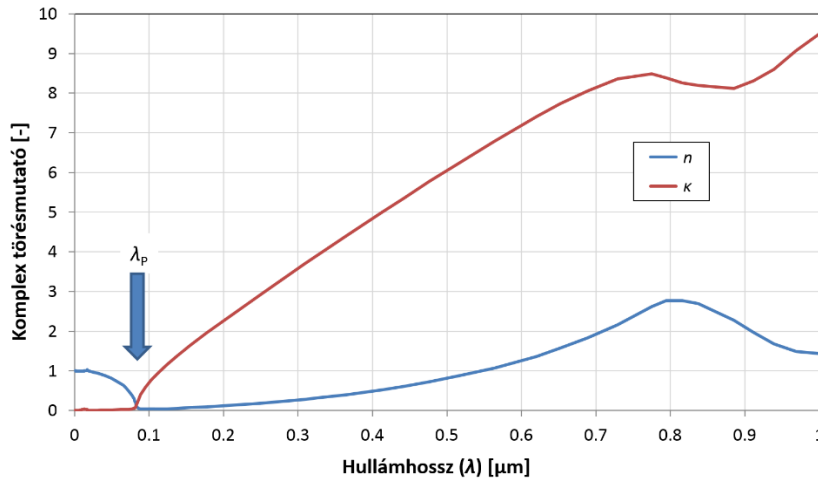
azaz

$$\tilde{n} = n - i\kappa, \quad (38)$$

ahol κ -t kioltási tényezőnek nevezik ($\kappa > 0$ elnyeléskor). A 2.4 alfejezetben bemutatandó k_{re} és k_{im} meghatározásának mintájára kiszámítható n_{re} és n_{im} értéke:

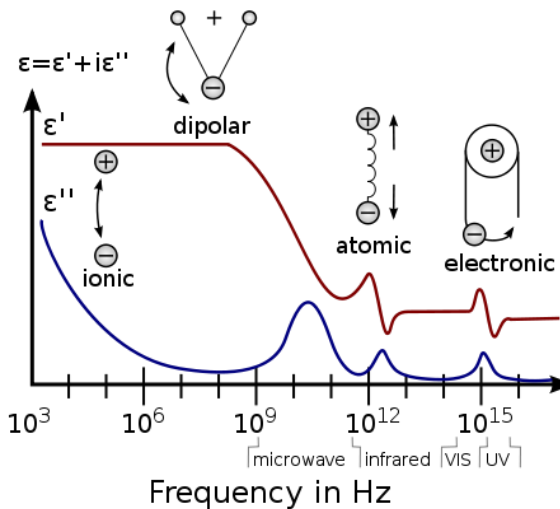
$$\kappa^2 = n_{\text{im}}^2 = \mu c^2 \left(-\frac{\varepsilon_{\text{re}}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_{\text{re}}^2 + \varepsilon_{\text{im}}^2} \right); \quad n^2 = n_{\text{re}}^2 = \mu c^2 \left(\frac{\varepsilon_{\text{re}}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_{\text{re}}^2 + \varepsilon_{\text{im}}^2} \right). \quad (39)$$

A komplex törésmutatót leggyakrabban a felületi reflexió mértékét számszerűsítő Fresnel-formulákban, valamint vékonyréteg-struktúrák interferometrikus leírásánál szokták használni. Mind a dielektromos permittivitás, mind a törésmutató erőteljesen függ a vizsgált sugárzás hullámhosszától. Egy tipikus fém, az alumínium esetére az alábbi ábrán bemutatjuk a hullámhosszfüggést (ld. Kramers-Krönig-relációk).



6. ábra. Az alumínium törésmutatója és kioltási tényezője. λ_p a plazmafrekvenciához tartozó hullámhossz. (forrás: <http://refractiveindex.info>)

Ahogy korábban megjegyeztük, általános esetben nem csak a vezetőképesség, hanem bármilyen abszorpció leírható a komplex dielektromos permittivitással. A szabad elektronok fent vizsgált plazmája mellett az egyedi atomok, ionok és molekulák is rezonálhatnak a beeső sugárzással, ezzel abszorpciót okozva. Mivel ezek a folyamatok különböző hullámhosszakon lépnek föl, ϵ_{re} és ϵ_{im} változatos frekvenciafüggést mutat (diszperzió). Egy (fiktív) abszorbens dielektrikumra mutat példát az alábbi ábra.



7. ábra. Az anyagokban fellépő főbb rezonanciák. (forrás: wikipedia)

2.4. Amikor $k_{im} \parallel k_{re}$, pl. ha egy vezető anyag felületére merőlegesen esik be a fény

Síkhullámokra a törésmutatót definiáló (37) képlet és (31) alapján mindig érvényes az alábbi összefüggés:

$$\tilde{\mathbf{k}}^2 = \tilde{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \tilde{n}^2 k_0^2. \quad (40)$$

Az viszont már nem feltétlenül igaz, hogy $k_{re} = n_{re}k_0$ és $k_{im} = n_{im}k_0$, mivel $\tilde{\mathbf{k}}$ valós és képzetes komponensei eltérő irányokba is mutathatnak. Nézzük meg azt az esetet, amikor $\mathbf{k}_{im} \parallel \mathbf{k}_{re}$ (pl. ha egy vezető anyag felületére merőlegesen esik be a fény). A (34) egyenlet alapján:

$$(\mathbf{k}_{\text{re}} - i\mathbf{k}_{\text{im}})^2 = k_{\text{re}}^2 - k_{\text{im}}^2 - i2\mathbf{k}_{\text{re}}\mathbf{k}_{\text{im}} = k_{\text{re}}^2 - k_{\text{im}}^2 - i2k_{\text{re}}k_{\text{im}} = a - ib, \quad (41)$$

ahol a következő segédjelöléseket vezettük be (35) alapján:

$$a \triangleq k_0^2 \varepsilon_{\text{re}} \mu c^2 \text{ és } b \triangleq k_0^2 \varepsilon_{\text{im}} \mu c^2. \quad (42)$$

Ezekkel az alábbi kétismeretlenes egyenletrendszer írható föl:

$$\left. \begin{aligned} k_{\text{re}}^2 - k_{\text{im}}^2 &= a \\ 2k_{\text{re}}k_{\text{im}} &= b \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

(43) egyenletből k_{im}^2 kifejezhető:

$$4(k_{\text{im}}^2)^2 + 4ak_{\text{im}}^2 - b^2 = 0. \quad (44)$$

A k_{im}^2 -ben másodfokú egyenlet megoldása (a – előjeles változat fizikailag értelmezhetetlen):

$$k_{\text{im}}^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = -\frac{k_0^2 \varepsilon_{\text{re}} \mu c^2}{2} + k_0^2 \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{\text{re}} \mu c^2)^2 + (\varepsilon_{\text{im}} \mu c^2)^2}, \quad (45)$$

ahol felhasználtuk (42)-et. Ebből:

$$k_{\text{im}}^2 = k_0^2 \mu c^2 \left(-\frac{\varepsilon_{\text{re}}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_{\text{re}}^2 + \varepsilon_{\text{im}}^2} \right), \quad (46)$$

valamint a valós rész:

$$k_{\text{re}}^2 = a + k_{\text{im}}^2 = \frac{k_0^2 \varepsilon_{\text{re}} \mu c^2}{2} + k_0^2 \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{\text{re}} \mu c^2)^2 + (\varepsilon_{\text{im}} \mu c^2)^2}, \quad (47)$$

ebből

$$k_{\text{re}}^2 = k_0^2 \mu c^2 \left(\frac{\varepsilon_{\text{re}}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_{\text{re}}^2 + \varepsilon_{\text{im}}^2} \right). \quad (48)$$

Látható, hogy ha $\sigma = 0$, akkor $\varepsilon_{\text{im}} = 0$, $k_{\text{im}} = 0$ valamint

$$k = k_{\text{re}} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{\text{r}} \mu_{\text{r}}}. \quad (49)$$

A fenti egyenleteket összevetve a törésmutató (39) képletével megkapjuk a jól ismert összefüggéseket:

$$\begin{aligned} k_{\text{re}} &= k_0 n \\ k_{\text{im}} &= k_0 \kappa \end{aligned} \quad \text{illetve } \kappa \text{ másik definíciója szerint } \kappa = \frac{k_{\text{im}}}{k_{\text{re}}}. \quad (50)$$

Érdekes megfigyelni, hogy ha (46) alapján kiszámoljuk a behatolási mélységet, akkor ugyanazt a kifejezést kapjuk, mint véges vezetőképességű anyagokban terjedő nagyfrekvenciás tér esetén megfigyelhető „skin”-effektusnál:

$$\delta = \frac{1}{k_{\text{im}}} = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{re}} \mu}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_{\text{re}}} \right)^2} - 1 \right)}}. \quad (51)$$

A fent bemutatott alumínium esetén, 550 nm-es hullámhosszon $\delta = 13$ nm.

2.5. Energiaterjedés EM hullámokban

Az EM tér teljesítmény-sűrűségét az ún. Poynting-vektor jellemzi (a terjedés irányára merőlegesen elhelyezkedő egységnyi felületen időegység alatt átáramló energia):

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (52)$$

ahol a térjellemzők valós mennyiségek. Az optikára jellemző nagy frekvenciákon jelenleg nem lehetséges a pillanatnyi teljesítmény detektálása, ugyanis a szokásos detektorok időállandója sokkal nagyobb mint a fény rezgésének periódusideje (T). Emiatt csak időátlagot tudunk megfigyelni:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, T) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, T) \rangle ; I = |\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle|. \quad (53)$$

Ezen vektor abszolút értékét nevezzük *intenzitásnak* (I). A komplex formalizmus használatával:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t}\} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})^* \cdot e^{-i\omega t}), \quad (54)$$

hasonlóan $\mathbf{H}$ -ra. (A komplex vektoramplitúdó jelentését később fogjuk értelmezni, most elégedjünk meg azzal, hogy segítségével leírható a lineárisan, cirkulárisan és elliptikusan polarizált sugárzás.) $\mathbf{E}$ -t és $\mathbf{H}$ -t visszahelyettesítve (52) képletbe könnyen belátható, hogy:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\} + \frac{1}{2}\text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i2\omega t}\}. \quad (55)$$

Az időátlagolás a második tagot kiejti:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\}. \quad (56)$$

Vezető közegben terjedő síkhullám esetén ebből a következő adódik, felhasználva (10)-t és a $(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \equiv (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ azonosságot:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle &= \frac{1}{2\mu\omega} \text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times (\tilde{\mathbf{k}}^* \times \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}))\} = \\ &= \frac{1}{2\mu\omega} |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2 \mathbf{k}_{\text{re}} - \frac{1}{2\mu\omega} \text{Re}\{(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{k}}^*) \cdot \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\}. \end{aligned} \quad (57)$$

A IV. Maxwell-egyenletből következő (36) összefüggés miatt a második tag síkhullám esetén izotróp közegben mindig nulla. $\mathbf{E}$ helyére behelyettesítve a síkhullámokat leíró (32)-et, a Poynting-vektor időátlagára a következő kifejezés adódik:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{1}{\mu} \frac{\mathbf{k}_{\text{re}}}{\omega} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2} \cdot e^{-2\mathbf{k}_{\text{im}}\mathbf{r}}. \quad (58)$$

Itt azt feltételeztük, hogy μ valós (ez optikában nagyon jó közelítés). A fenti kifejezés *Lambert-Beer-törvény* néven is ismert, amely azt fejezi ki, hogy homogén abszorbens közegben (pl. a felületre merőleges terjedés esetén) exponenciálisan csökken a síkhullám teljesítménysűrűsége és amplitúdója.

2.6. Mit tehet ma egy fizikus a diplomájával az optika területén?

Iparág	Alkalmazás	Termék, kutatás	Magyar vonatkozás
Informatika	adatátvitel	hálózat	Furukawa
		chipek közötti kommunikáció	SZTAKI
	megjelenítés	3D képernyő	Holografika Kft
	adatfeldolgozás	akusztó-optika	BME AFT
Energetika, nehézipar		neurális számítógép	SZTAKI
	anyagmegmunkálás	nagyteljesítményű lézerrendszerek	Lasram
	magfúzió	fúziós reaktor szimulációja	BME NTI
Orvostudomány		fúziós reaktor mérés technikája	Wigner FK
	lézeres sebészet	orvosi lézerek	Lasram
	vizelet diagnosztika, vércukor mérés	automata mikroszkóp, fizikai paraméterek optikai mérése, kémiai indikátorcsíkok optikai leolvasása	77Elektronika
	orvosi képalkotás	Pozitron Emissziós Tomográfia (PET)	Mediso
		konfokális 3D mikroszkóp kétfotonos gerjesztéssel	Femtonics
	színlátás korrekció	vékonyrétegek	BME MOGI
	vízminőség vizsgálat	3D digitális holográfia	SZTAKI
	vérvizsgálat	diagnosztikai eszközök	Diatron
Élelmiszeripar	szenzorok	NIR spektrométer	Siemens-BME
Félvezető gyártás	félvezető diagnosztika	lézeres fényforrások és mérőberendezések	Semilab
Világítástechnika	világítás	nagy hatékonyságú LED-es kültéri megvilágító rendszerek	Optimal Optik
	kijelzők	műszerfal	Bosch
	világítás	megvilágító rendszerek	OMI Optika
Alap kutatás	anyagtudomány, biológia	femto- és attoszekundumos lézerimpulzusok	ELI
Hadiipar	...		

2. táblázat. Az optikával foglalkozó fizikusok elhelyezkedési lehetőségei Magyarországon.

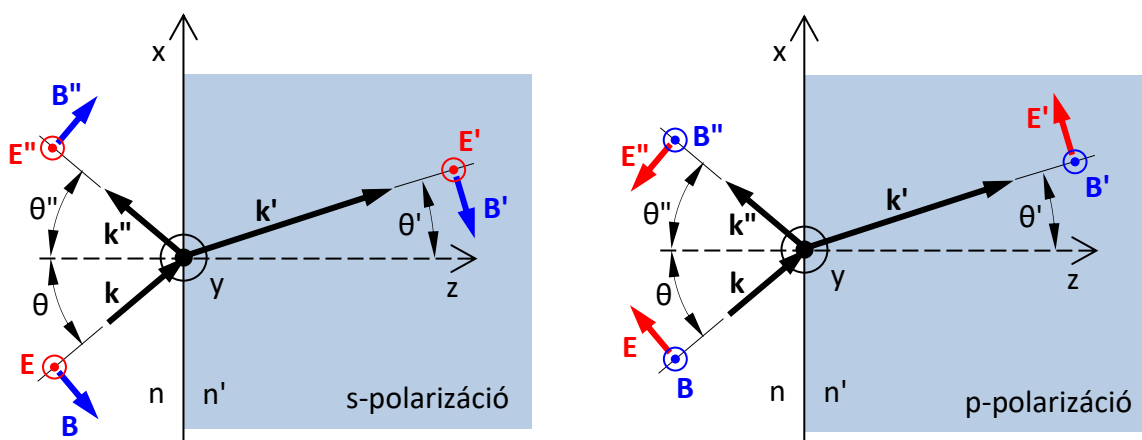
3. SÍKHULLÁMOK VISELKEDÉSE SÍK HATÁRFELÜLETEN

3.1. Polarizációs sajátállapotok síkhullám-síkfelület találkozásánál

Hullámtanból ismert, hogy ha a terjedési sebesség ugrásszerűen változik két közeg határfelülete mentén, reflexió és törés jelensége lép fel. A visszaverődés megjelenése kifejezetten az ugrásszerű törésmutató-változásnak köszönhető, amikor is a hullámnak a felületnél két feltételt kell egyszerre kielégíteni: az energiamegmaradását és az amplitudó (megfelelő komponensének) folytonos áthaladását. Olyan esetben, amikor a térbeli törésmutató-átmenet lassú, nincs amplitúdófeltétel, így reflektált hullám sem jelenik meg. Az alábbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor az optikai anyagjellemzők ugrásszerűen (azaz a hullámhossznál jóval kisebb tartományon belül) változnak egy sík felületre merőleges irányban.

Fény esetén a reflexió/transzmisszió tárgyalásakor nem hagyható figyelmen kívül az EM hullám transzverzalitása, azaz a polarizáció. Polarizált sugárzásról akkor beszélünk, amikor az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ térerősségvektorok rezgésének *iránya* hosszú távú időbeli és térbeli rendezettséget (periodicitást) mutat. A rendezettség legismertebb fajtája a lineáris polarizáció, amikor a térerősségvektorok rezgése állandóan egy síkban marad (a „polarizált”, régiesen „sarkított” kifejezés két rögzített, ellentétes pólusra utal). A teljesen monokromatikus síkhullám mindig polarizált, általános esetben elliptikusan (ld. a 13 fejezet). *Polarizálatlan* fény létrehozásához nagy számú, különböző irányú amplitúdóvektorral rendelkező és eltérő frekvenciájú síkhullámot kell összekevernünk. Ez utóbbi feltétel miatt a sugárzás hullámhossz-spektruma kiszélesedik (már nem lesz monokromatikus). Amennyiben nem a komponensek frekvenciája, hanem a terjedési iránya eltérő, akkor a távotérben divergens lesz a nyaláb (azaz többé már nem síkhullám). További feltétel, hogy az összetevő síkhullám-komponensek kezdőfázisa legyen véletlenszerű, különben időben impulzusszerű viselkedést kapunk. Ha a térbeli és időbeli véletlenszerűség egyidejűleg lép fel, a környezetünkben tapasztalható diffúz és polarizálatlan sugárzást kapjuk. (Ezekről a térbeli és időbeli koherenciánál lesz szó.)

A továbbiakban egy ideális (végtelen) síkhullámot bocsátunk egy sík felületre, és vizsgáljuk a fényvisszaverődés/törés törvényszerűségeit. A levezetésnél abszorpciómentes dielektrikum közegeket tételezünk fel (tehát n és k valós). Mivel a síkhullám egzakt megoldása a Maxwell-egyenleteknek, eredményeink nem csupán a geometriai optikai közelítés keretein belül érvényesek (ld. a 4. fejezet), hanem általános hullámoptikai törvényszerűségek. [1]



8. ábra. Az s- és p-polarizációs sajátállapotok értelmezése, és az alkalmazott jelölések bemutatása. A beeső hullámszámvektor és a felületnormális jelölik ki a *beesési síkot*. A visszaverődési és törési síkokat hasonlóan adjuk meg.

A levezetés fontos eleme az a megfigyelés, hogy a felületi reflexiónak/transzmisszióknak vannak polarizációs sajátállapotai (ld. a 13. fejezet). Izotróp anyagoknál ezek lineárisan polarizált síkhullámok: az s-polarizáció (σ , vagy TE polarizáció) amikor az elektromos térerősség merőleges a beesési síkra, és a p-polarizáció (π , vagy TM polarizáció), amikor az elektromos térerősség párhuzamos a beesési síkkal. Mivel ezek sajátállapotok, visszaverődés és törés közben *nem változnak meg*, csak a rezgés komplex amplitúdója módosul (abszolút értékben és fázisban).

A beeső, visszavert és megtört síkhullámok, illetve hullámszámvektoraik:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (59)$$

$$\mathbf{k} = n \cdot \mathbf{k}_0 \Rightarrow \mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) = n \cdot k_0 (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= (k_x'', k_y'', k_z'') ; k_x''^2 + k_y''^2 + k_z''^2 = n^2 k_0^2 \\ \mathbf{k}' &= (k_x', k_y', k_z') ; k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2 = n'^2 k_0^2 \end{aligned} \quad (61)$$

A vektoramplitúdó komplex értéke ($\tilde{\mathbf{E}}_0$) azt fejezi ki, hogy összetevő komponenseinek kezdőfázisa elvben tetszőleges lehet, aminek a segítségével általános (lineáris, cirkuláris, elliptikus) polarizációt le lehet írni (erről bővebben a 13. fejezetben lesz szó), valamint a beeső, visszavert és áthaladó hullámok relatív fázisa is eltérő lehet (pl. abszorbens közegeknél).

3.2. Kontinuitási feltételek két dielektrikum határán

A Maxwell-egyenletek határfeltételei alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_t &= \mathbf{E}_t + \mathbf{E}''_t \\ \mathbf{H}'_t &= \mathbf{H}_t + \mathbf{H}''_t \end{aligned} \rightarrow \frac{\mathbf{B}'_t}{\mu'} = \frac{\mathbf{B}_t}{\mu} + \frac{\mathbf{B}''_t}{\mu} \rightarrow \begin{aligned} \mathbf{E}'_t &= \mathbf{E}_t + \mathbf{E}''_t \\ \mathbf{B}'_t &= \mathbf{B}_t + \mathbf{B}''_t \end{aligned} \quad (62)$$

ahol feltételeztük, hogy a közegek nem mágnesesizhetők, azaz $\mu = \mu' = \mu_0$. (A két amplitúdófeltétel helyett használhatnánk az egyiket az energiamegmaradás törvényével együtt. Levezetésünkben ez utóbbit a kapott képletek alapján fogjuk ellenőrizni.) A fenti összefüggésekre akkor van szükségünk, ha az anyagjellemzők a hullámhossznál jóval kisebb tartományon belül változnak (azaz ugrásszerűen). (59)-t behelyettesítve $\mathbf{E}$ feltételébe:

$$\tilde{\mathbf{E}}'_{t0} \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} = \tilde{\mathbf{E}}_{t0} \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \tilde{\mathbf{E}}''_{t0} \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})}. \quad (63)$$

A határfelületen van jelen egyszerre mindhárom hullám, ezért itt vizsgálódunk. Tehát $z = 0$, $k_y = 0$, és $e^{i\omega t}$ -vel egyszerűsítve:

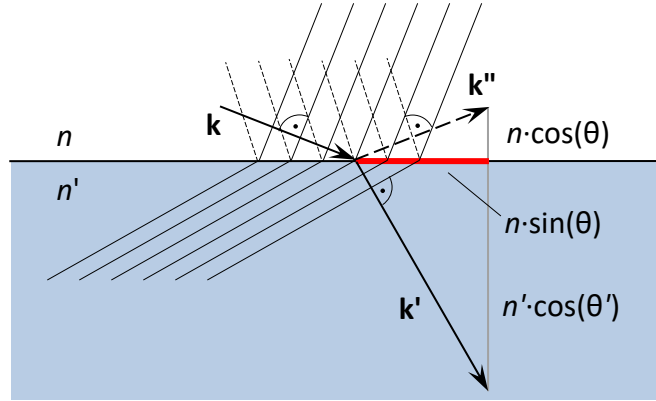
$$\tilde{\mathbf{E}}'_{t0} \cdot e^{-i(k'_x x + k'_y y)} = \tilde{\mathbf{E}}_{t0} \cdot e^{-i(k_x x)} + \tilde{\mathbf{E}}''_{t0} \cdot e^{-i(k''_x x + k''_y y)}. \quad (64)$$

Hasonlóan $\mathbf{B}_t$ -re. (64) akkor teljesül tetszőleges (x, y) értékre, ha azonosak kitévők:

$$k'_x x + k'_y y = k_x x = k''_x x + k''_y y. \quad (65)$$

Ez az ún. *fázisillesztés*, ami azt jelenti, hogy a felület mentén mind a beeső, a visszavert és az áthaladó hullámok fázisa azonos mértékben változik a határfelület mentén (azaz az x-tengelyre vetített hullámhossz ill. hullámszámvektor mindhárom esetben egyforma):

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } k'_y &= k''_y = 0 \\ \text{II. } k_x &= k''_x \\ \text{III. } k_x &= k'_x \end{aligned} \right\} \quad (66)$$



9. ábra. A fázisillesztés szemléltetése.

I.-ből következik, hogy a törési és tükrözési sík egybeesik a beesési síkkal.

II.-ből megkapjuk a tükrözési törvényt:

$$\sin \theta = \sin \theta'' \Rightarrow \theta = \theta'' \quad (67)$$

III.-ból a törési törvényt (Snellius-Descartes törvény):

$$n \cdot k_0 \sin \theta = n' \cdot k_0 \sin \theta' \Rightarrow n \cdot \sin \theta = n' \cdot \sin \theta', \quad (68)$$

ahol θ és $\theta'' \in [0; \pi/2]$. Ha a fázisok egyenlőek, egyszerűsíthetünk velük (64)-ban. Így kapjuk az amplitúdókra vonatkozó feltételt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}'_{t0} &= \tilde{\mathbf{E}}_{t0} + \tilde{\mathbf{E}}''_{t0} \\ \tilde{\mathbf{B}}'_{t0} &= \tilde{\mathbf{B}}_{t0} + \tilde{\mathbf{B}}''_{t0}. \end{aligned} \quad (69)$$

3.3. S-polarizáció, azaz $\mathbf{E}$ merőleges a beesési síkra

$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$; $E_x = 0$ csak $E_y \rightarrow E_y = E$, azaz (69) alapján:

$$\tilde{E}'_0 = \tilde{E}_0 + \tilde{E}''_0. \quad (70)$$

A II. Maxwell-egyenletből meghatározzuk $\mathbf{B}$ értékét (a beeső, megtört és visszavert síkhullámokra egyaránt):

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow -i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 = -i\omega \tilde{\mathbf{B}}_0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_0}{\omega} \quad (71)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ k_x & 0 & k_z \\ 0 & \tilde{E}_0 & 0 \end{vmatrix} = -k_z \tilde{E}_0 \hat{x} - 0 \cdot \hat{y} + k_x \tilde{E}_0 \hat{z} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{-k_z \tilde{E}_0 \hat{x} + k_x \tilde{E}_0 \hat{z}}{\omega}. \quad (72)$$

(69)-ből a $\mathbf{B}$ -re vonatkozó feltétel ($\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y$; $B_y = 0$):

$$\tilde{B}'_{0x} = \tilde{B}_{0x} + \tilde{B}''_{0x} \quad (73)$$

Ide behelyettesítve (72) x-komponensét, és ω -val egyszerűsítve:

$$-k'_z \tilde{E}'_0 = -k_z \tilde{E}_0 - k''_z \tilde{E}''_0. \quad (74)$$

A tükrözési törvény alapján $k''_z = -k_z$:

$$-k'_z \tilde{E}'_0 = -k_z \tilde{E}_0 + k_z \tilde{E}''_0 \quad (75)$$

Mindkét oldalt elosztva $-k_z$ -vel:

$$\frac{k'_z}{k_z} \tilde{E}'_0 = \tilde{E}_0 - \tilde{E}''_0. \quad (76)$$

(70) és (76) kétismeretlenes egyenletrendszert alkot, amelyeket megoldhatunk $\tilde{E}'_0$ -ra és $\tilde{E}''_0$ -ra:

$$\tilde{E}'_0 = \frac{2}{1 + \frac{k'_z}{k_z}} \tilde{E}_0 \quad ; \quad \tilde{E}''_0 = \frac{2}{1 + \frac{k'_z}{k_z}} \tilde{E}_0 - \tilde{E}_0 \quad (77)$$

Bevezetjük az a segédváltozót:

$$a \triangleq \frac{k'_z}{k_z}, \quad (78)$$

amivel a (77) összefüggések egyszerűbb alakba írhatók:

$$\tilde{E}'_0 = \frac{2}{1 + a} \tilde{E}_0 \quad ; \quad \tilde{E}''_0 = \frac{1 - a}{1 + a} \tilde{E}_0. \quad (79)$$

Az s-polarizáció esetén definiált transzmissziós (τ_s) és reflexiós (ρ_s) tényezők ezzel:

$$\tau_s \triangleq \frac{\tilde{E}'_0}{\tilde{E}_0} = \frac{2}{1 + a} \quad ; \quad \rho_s \triangleq \frac{\tilde{E}''_0}{\tilde{E}_0} = \frac{1 - a}{1 + a} \quad (80)$$

$$a = \frac{k'_z}{k_z} = \frac{n' \cos(\theta')}{n \cos(\theta)} \quad (81)$$

$$\tau_s = \frac{2n \cos(\theta)}{n \cos(\theta) + n' \cos(\theta')} \quad ; \quad \rho_s = \frac{n \cos(\theta) - n' \cos(\theta')}{n \cos(\theta) + n' \cos(\theta')}. \quad (82)$$

Fontos észrevenni, hogy dielektrikumok határfelületén a transzmissziós és reflexiós tényezők értéke valós, tehát a beeső, visszavert és áthaladó hullámok között konstans fázistolás sincsen.

3.4. P-polarizáció, azaz E párhuzamos a beesési síkkal

$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y$; $B_x = 0$ csak $B_y \rightarrow B_y = B$, azaz (69) alapján:

$$\tilde{B}'_0 = \tilde{B}_0 + \tilde{B}''_0, \quad (83)$$

valamint $E_y = 0$. Ezekből a fentiekhez hasonlóan levezethetők a p-polarizációs transzmissziós (τ_p) és reflexiós (ρ_p) tényezők:

$$\tau_p \triangleq \frac{\tilde{E}'_0}{\tilde{E}_0} = \frac{2}{1 + b} \frac{n}{n'} \quad ; \quad \rho_p \triangleq \frac{\tilde{E}''_0}{\tilde{E}_0} = \frac{1 - b}{1 + b} \quad (84)$$

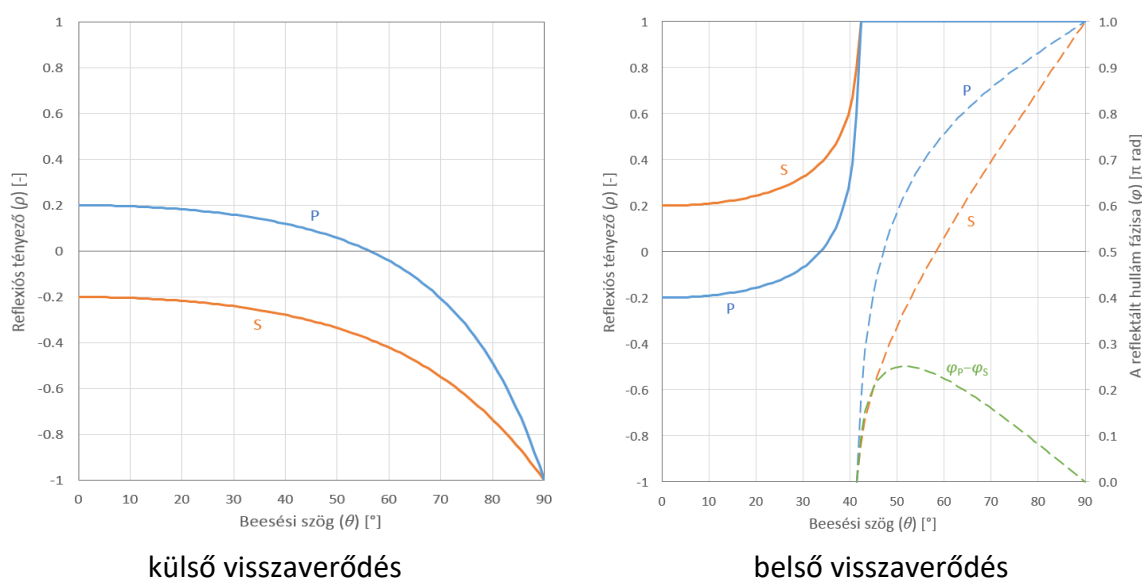
$$b \triangleq \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \frac{k'_z}{k_z} = a \cdot \left(\frac{n}{n'}\right)^2 = \frac{n \cos(\theta')}{n' \cos(\theta)} \quad (85)$$

$$\tau_p = \frac{2n \cos(\theta)}{n' \cos(\theta) + n \cos(\theta')} \quad ; \quad \rho_p = \frac{n' \cos(\theta) - n \cos(\theta')}{n' \cos(\theta) + n \cos(\theta')}. \quad (86)$$

A (82) és (86) összefüggéseket *Fresnel-formuláknak* nevezzük.

3.5. A Fresnel-formulák diszkutálása

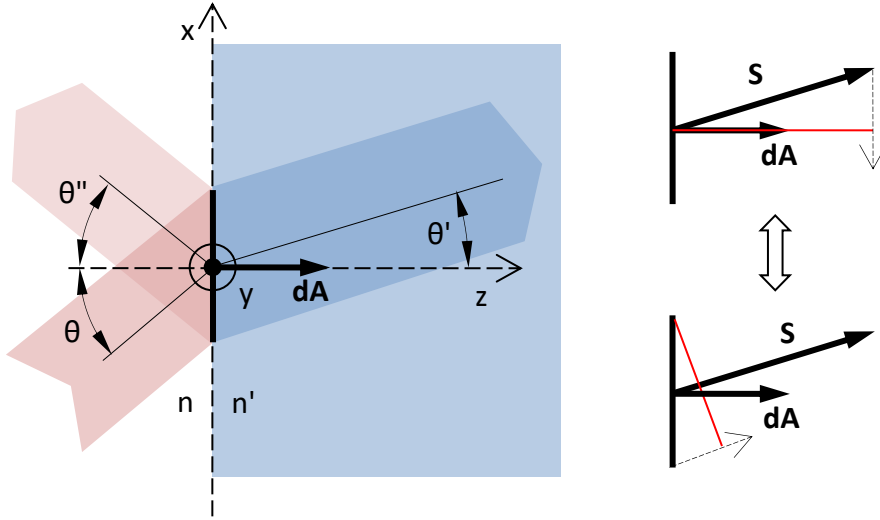
A 10. ábrán levegő-üveg határfelület esetére ($n = 1$ és $n' = 1,5$) bemutatjuk a reflexiós és transzmissziós tényezők szögfüggését. Az első amit érdemes megfigyelni, hogy külső visszaverődés esetén ($n < n'$), az elektromágneses tér a beeső sugárhoz képest *ellenfázisban* verődik vissza (ld. ρ_s előjele). A második, hogy a beesési szög növekedésével az s-reflexiós tényező abszolút értékben nő és 1-hez tart. A harmadik, hogy egy adott szögnél $\rho_p = 0$, azaz a visszavert sugárzás teljesen polarizált, *csak s-komponenst* tartalmaz. Ez az ún. *Brewster-effektus*, amiről később részletesebben lesz szó. A negyedik, hogy belső visszaverődésnél ($n > n'$) a reflexió nem 90°-os szögnél éri el a maximumát (1-et), hanem jóval korábban. Ezt *teljes belső visszaverődésnek* nevezzük, és alább szintén részletesen tárgyaljuk.



10. ábra. A külső és belső visszaverődés reflexiós tényezői a beesési szög függvényében üveg (törésmutató: 1,5) / levegő (törésmutató: 1,0) határfelület esetén.

A 2. fejezetben bevezettük az abszorbens közegek leírására alkalmas komplex hullámszámvektort és törésmutatót. Merőlegetől eltérő beesési szög esetén a hullámszámvektor valós és képzetes komponensei nem mutatnak egy irányba, emiatt a $\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{n} \cdot \mathbf{k}_0$ összefüggés sem igaz. Ebből az következik, hogy a Fresnel-formulák levezetésénél kiindulásul használt (60) abszorbens közeg esetén nem érvényes tetszőleges beesési szög mellett, csak ha $\theta \approx 0^\circ$! Ettől függetlenül, a reflexiós és transzmissziós tényezők mindenképpen komplex mennyiségek lesznek, azaz fémek felületéről történő visszaverődés után *a rezgés fázisa megváltozik*. Ennek további következménye, hogy míg dielektrikum-felületekről történő visszaverődés esetén a beeső nem s- vagy p-polarizációjú lineárisan polarizált sugárzás mindig lineáris marad (csak a rezgés síkja fordul el), fémek esetében a visszavert sugárzás az s- és p-komponensek közötti fáziskülönbség miatt elliptikussá változik. A tetszőleges szögre alkalmazható általános formulák levezetése megtalálható az alábbi referenciákban: [3] 611-664 o. és [5], valamint egy rövid összefoglalás formájában e fejezet végén is.

3.6. A teljesítményviszonyokra vonatkozó Fresnel-formulák



11. ábra. Az elemi felületen áthaladó/visszaverődő síkhullám teljesítményviszonyai leírásánál használt jelölések összefoglalása.

A 2. fejezet alapján a detektálható, idő szerint átlagolt teljesítmény-sűrűség vektor (valós hullámszámvektorú dielektrikumközegek esetére):

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{\mu} \frac{k}{\omega} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0|^2}{2}. \quad (87)$$

Az alábbiakban az $x = y = z = 0$ pontban vizsgálódunk és továbbra is feltételezzük, hogy a közeg nem mágneses: $\mu = \mu' = \mu_0$. Ekkor beeső nyalábból dA felületegységre merőlegesen beeső átlagos teljesítmény (ami pontosan ekvivalens azzal, mintha a dA felületelemnek a nyalábra merőleges vetületét vennénk):

$$dP = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0|^2}{2} \cos(\theta) dA. \quad (88)$$

Ugyanez a megtört nyalábra:

$$dP' = \langle \mathbf{S}' \rangle \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{k'}{\omega} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0'|^2}{2} \cos(\theta') dA, \quad (89)$$

és a visszavert nyalábra:

$$dP'' = \langle \mathbf{S}'' \rangle \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0''|^2}{2} \cos(\theta'') dA. \quad (90)$$

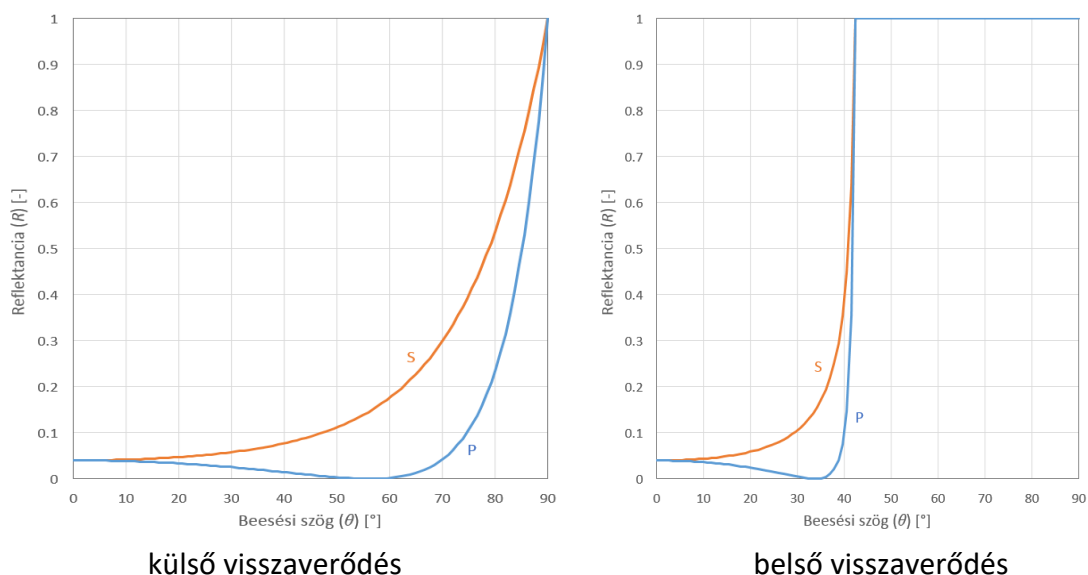
A felületegységre merőlegesen beeső és visszavert fényteliesség komponensek hányadosa a *reflektancia* (R):

$$R \triangleq \frac{dP''}{dP} = \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0''|^2}{|\tilde{\mathbf{E}}_0|^2} = |\rho|^2. \quad (91)$$

A felületegységre merőlegesen beeső és áthaladó (megtört) fényteliesség komponensek hányadosa a *transzmittancia* (T):

$$T \triangleq \frac{dP'}{dP} = \frac{|\langle \mathbf{S}' \rangle| \cos \theta'}{|\langle \mathbf{S} \rangle| \cos \theta} = \frac{I' \cos \theta'}{I \cos \theta} = \frac{k' |\tilde{\mathbf{E}}_0'|^2 \cos \theta'}{k |\tilde{\mathbf{E}}_0|^2 \cos \theta} = |\tau|^2 \frac{n' \cos \theta'}{n \cos \theta}. \quad (92)$$

Érdekes megfigyelni, hogy a fénynyaláb keresztmetszete törés után *megváltozik*, amit a koszinuszos tényező fejez ki a (92) képletben. Emiatt törés után akkor is megváltozik a fénynyaláb intenzitása (I' azaz $\langle S' \rangle$), ha a transzmittancia 100%-os (pl. reflexiócsökkentő réteg alkalmazása esetén): ha $n < n'$ akkor csökken, fordított esetben pedig nő. Az effektus használható többek között fénynyaláb egyirányú nyújtására (ld. lézerdiódák anamorfikus nyalábformálása).



12. ábra. A külső és belső visszaverődés reflektanciái a beesési szög függvényében üveg (törésmutató: 1,5) / levegő (törésmutató: 1,0) határfelület esetén.

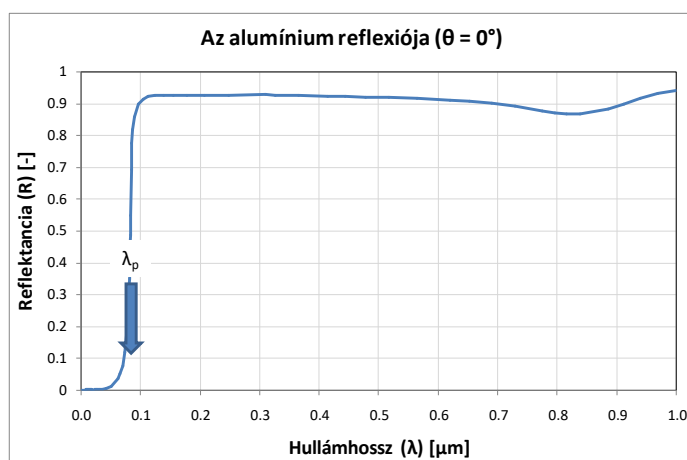
A fentiekből az is könnyen belátható, hogy T -re és R -re teljesül az energiamegmaradás törvénye:

$$T + R = 1. \quad (93)$$

Merőleges beesés esetén:

$$T = \left| \frac{2n}{n+n'} \right|^2 \frac{n'}{n} \quad \text{és} \quad R = \left| \frac{n-n'}{n+n'} \right|^2. \quad (94)$$

Ha az első közeg levegő ($n = 1$), a második közönséges boroszilikát üveg ($n' = 1,5$), akkor $\rho = -0,2$ és $R = 0,04$ (azaz 4%).



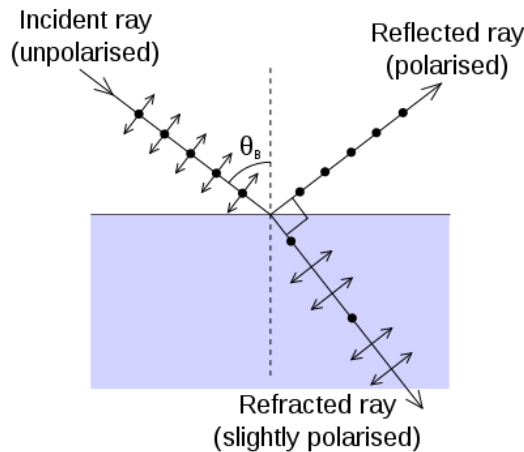
13. ábra. Az alumínium reflektanciája a komplex törésmutató alapján számolva, merőleges beesés esetén, ld. (94) képlet.

3.7. Brewster-effektus

A fény törése és visszaverődése mikroszkopikusan úgy értelmezhető, hogy a beeső sugárzást a második közegben lévő atomokat reprezentáló elektromos dipólusok elnyelik (azaz rezgésbe jönnek) majd visszasugározzák. A sugárzó dipólus nem bocsájt ki energiát a rezgés tengelyének irányába. Ha a visszavert sugárzás iránya éppen merőleges a megtört irányára ($\theta + \theta' = 90^\circ$), és a beeső sugárzás p-polarizációjú (azaz nincs a beesési síkra merőleges komponense), akkor a második közegben lévő dipólusok a visszavert sugárzás irányára merőlegesen rezegnek. Ebből az következik, hogy a visszavert p-polarizációjú sugárzásnak zérus az energiatartalma, azaz $R_p = 0$. Ezt a jelenséget Brewster-effektusnak nevezik a felfedezőjéről, a rá jellemző beesési szöget pedig θ_B -vel jelölik. A $R_p = 0$ feltételből, a törési törvény felhasználásával könnyen levezethető (ld. gyakorlat):

$$\tan \theta_B = \frac{n'}{n} \quad (95)$$

A már korábban vizsgált levegő-üveg határfelület esetére: $\theta_B = 56,3^\circ$. Ha polarizálatlan fény esik Brewster-szög alatt egy felületre, akkor a visszavert sugárzás lineárisan polarizált lesz, hiszen csak s-polarizációjú komponenst tartalmaz.



14. ábra. A Brewster-effektus szemléltetése (forrás: wikipedia).

3.8. Teljes belső visszaverődés (totálreflexió): $n' < n$

A (82) és (86) Fresnel-formulákban alkalmazott a segédváltozó értéke $n' < n$ esetén (ld. s-polarizáció levezetés), bizonyos beesési szög fölött komplex értéket vesz fel. Ennek matematikai magyarázata a definíciójában rejlik, aminek megértéséhez rendezzük át a formulát:

$$a = \frac{k'_z}{k_z} = \frac{k_0 \cdot n' \cos \theta'}{k_0 \cdot n \cos \theta} = \frac{n' \sqrt{1 - \sin^2 \theta'}}{n \cos \theta} = \frac{\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \theta}}{n \cos \theta}. \quad (96)$$

Ha a beesési szög (θ) meghalad egy bizonyos kritikus értéket ($\theta = \theta_c$ amikor $k'_z = 0$), akkor (96)-ben a gyökjel alatt negatív szám áll. A kritikus szög könnyen meghatározható, ha megnézzük mikor nulla a gyökjel alatti kifejezés:

$$n' = n \cdot \sin \theta_c \rightarrow \theta_c = \arcsin \frac{n'}{n} \quad (97)$$

Most azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor $\theta_c < \theta$, hogy megértsük fizikailag mit takar a komplex értéke. A (96) egyenletet átalakítva:

$$a = \frac{\sqrt{-1 \cdot (n^2 \sin^2 \theta - n'^2)}}{n \cos \theta} = \pm i \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}}{n \cos \theta} \triangleq -i\gamma. \quad (98)$$

Itt a negatív előjelet kellett választanunk, mert az alábbiakból ki fog derülni, hogy ennek van fizikai jelentése. Ekkor a második közegben lévő hullámszámvektorra a következőt kapjuk (ld. $\tilde{\mathbf{k}}$ (32) definícióját a 2. fejezetben):

$$k'_z = -ik_z\gamma = -ik'_{\text{im},z} \Rightarrow k'_{\text{im},z} = k_z\gamma. \quad (99)$$

A fenti összefüggést a komplex hullámszámvektornál tanultak alapján úgy értelmezhetjük, hogy teljes visszaverődésnél a kisebb törésmutatójú (n') közegben a hullám z-irányban erősen csillapodik. A fázisillesztés miatt továbbra is igaz, hogy $k'_x = k_x$, azaz a hullámszámvektor valós része x-irányba, a felülettel párhuzamosan mutat (másszóval $\mathbf{k}'_{\text{re}} \perp \mathbf{k}'_{\text{im}}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(x, z, t) &= \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t - k'_x x - k'_z z)} = \\ &= \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t - k'_x x + i\gamma k_z z)} = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega t - k'_x x)} e^{-\gamma k_z z}. \end{aligned} \quad (100)$$

Az ilyen tereket nevezzük elhaló hullámnak (*evanescent wave*). A behatolási mélység (δ) 2. fejezetben bemutatott definíciója alapján:

$$\delta \triangleq \frac{1}{k'_{\text{im},z}} = \frac{1}{k_z\gamma} = \frac{1}{k_z} \frac{n \cdot \cos \theta}{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}}. \quad (101)$$

Üveg/levegő határfelületen ($n = 1,5$; $n' = 1,0$) a határszög $\theta_c = 41,8^\circ$. $\theta = 45^\circ$ -os beesés esetén:

$$\delta = \frac{3}{k_z} = \lambda' \cdot 0,48 = 263 \text{ nm}, \quad (102)$$

ahol $\lambda = 550 \text{ nm}$ -es közepes (zöld) hullámhosszt tételeztünk fel.

Érdekes észrevenni, hogy a teljes visszaverődés határszögének helyzetében $k'_x = k'$. Mivel a fázisillesztés miatt mindig igaz, hogy $k_x = k'_x$, a határszögnél nagyobb beesési szögekre $k'_x > k'$, azaz a hullámhossz (x-irányú periodicitás) a második közegben *kisebb* mint az ott szabadon terjedő ideális síkhullám esetén!

Végezetül nézzük meg a fázisviszonyokat. Teljes visszaverődés esetén a Fresnel-formuláknál bevezetett a és ebből kifolyólag b értéke is komplex, így a reflexiós tényezők is azok lesznek:

$$\rho_s \triangleq \frac{\tilde{E}_0''}{\tilde{E}_0} = \frac{1-a}{1+a} = \frac{1+i\gamma}{1-i\gamma} = \frac{A \cdot e^{i\varphi_s/2}}{A \cdot e^{-i\varphi_s/2}} = e^{i\varphi_s} \quad (103)$$

$$\rho_p \triangleq \frac{\tilde{E}_0''}{\tilde{E}_0} = \frac{1-b}{1+b} = \frac{1+i\gamma\left(\frac{n}{n'}\right)^2}{1-i\gamma\left(\frac{n}{n'}\right)^2} = \frac{B \cdot e^{i\varphi_p/2}}{B \cdot e^{-i\varphi_p/2}} = e^{i\varphi_p}. \quad (104)$$

Ez azt jelenti, hogy a visszavert fény *fázistolást* szenved. Mivel általában $\varphi_s \neq \varphi_p$ (hanem beesési szög-függő), a felületre nem s- vagy p-polarizációban beeső lineárisan polarizált síkhullám visszaverődés után elliptikusan polarizált lesz. A (104) összefüggésekből az is látszik, hogy a reflexiós tényezők abszolút értéke $R_{s,p} = 1$, azaz minden beeső energia visszaverődik. Emiatt nevezik az effektust teljes belső visszaverődésnek (*total internal reflection*, TIR). A komplex síkon felrajzolt fazorábra segítségével (104)-ből könnyen belátható, hogy:

$$\varphi_s = 2 \arctan \gamma \quad (105)$$

$$\varphi_p = 2 \arctan \left(\gamma \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right). \quad (106)$$

A teljes visszaverődés jelenségét egyebek mellett pl. fény terelésére szolgáló prizmánál (ld. SLR azaz tükörreflexes kamerák betekintője, binokuláris távcsövek képfordítója), illetve fény- és hullámvezető optikai szálakban használják. A polarizációs sajátállapotok eltérő fázistolásának kihasználásával építhető egy speciális prizma, az ún. Fresnel-rombusz, amely hullámhossz-független $\lambda/4$ -es retarderként működik (a lineárisan polarizált fényt cirkulárisra alakítja).

3.9. Síkhullám törése sík dielektrikum/fém határfelületen (kiegészítő anyag)

A beesési közeg legyen n törésmutatójú dielektrikum, a törési közeg pedig legyen erősen elnyelő anyag (fém). A 2. fejezet (40)-es képlete alapján:

$$\tilde{\mathbf{k}}'^2 = k_0 \tilde{n}'^2. \quad (107)$$

Vezessük be az N' és K' látszólagos törésmutatót és kioltási tényezőt a fémbe:

$$\tilde{\mathbf{k}}' \triangleq k_0 (N' \hat{\mathbf{e}} - iK' \hat{\mathbf{f}}), \quad (108)$$

ahol az elhaló hullám hullámfrontnormálisa az $\hat{\mathbf{e}}$ egységvektor irányába mutat, a képzetes hullámszámvektor pedig az $\hat{\mathbf{f}}$ egységvektor irányába mutat (erre gyengül a tér). A (107) egyenlet valós és képzetes részeit szétválasztva könnyen megkapható:

$$\left. \begin{aligned} N'^2 - K'^2 &= n'^2 - \kappa'^2 \\ K' N' \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{f}} &= n' \kappa' \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

ahol bevezettük a következő jelölést:

$$\cos \alpha \triangleq \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{f}}. \quad (110)$$

A (109) egyenletből könnyen levezethető a (108) látszólagos törésmutató értéke:

$$N'^2 = \frac{1}{2} \left(n'^2 - \kappa'^2 + \sqrt{(n'^2 - \kappa'^2)^2 + 4 \left(\frac{n' \kappa'}{\cos \alpha} \right)^2} \right). \quad (111)$$

Mivel a fázisillesztés itt is igaz:

$$\tilde{k}'_x = k_x \quad \Leftrightarrow \quad k_{\text{re},x} - i k_{\text{im},x} = k_x, \quad (112)$$

ebből kifolyólag $k_{\text{im},x} = 0$, azaz $\hat{\mathbf{f}}$ mindig merőleges a felületre, és emiatt $\alpha = \theta'$. Ha a beesési közeg dielektrikum, a törési törvény így írható:

$$N' \sin \theta' = n \sin \theta \quad (113)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left(n'^2 - \kappa'^2 + \sqrt{(n'^2 - \kappa'^2)^2 + 4 \left(\frac{n' \kappa'}{\cos \theta'} \right)^2} \right)} \sin \theta' = n \sin \theta. \quad (114)$$

Ha $\kappa' \gg n'$, ami fémeknél általában igaz, akkor a következő közelítéssel élhetünk:

$$\sqrt{(n'^2 - \kappa'^2)^2 + 4 \left(\frac{n' \kappa'}{\cos \theta'} \right)^2} = |n'^2 - \kappa'^2| \sqrt{1 + 4 \left(\frac{n' \kappa'}{(n'^2 - \kappa'^2) \cos \theta'} \right)^2} \approx$$

$$\begin{aligned}
&\approx |n'^2 - \kappa'^2| \left(1 + 2 \left(\frac{n' \kappa'}{(n'^2 - \kappa'^2) \cos \theta'} \right)^2 \right) = \kappa'^2 - n'^2 + \frac{2n'^2 \kappa'^2}{(\kappa'^2 - n'^2) \cos^2 \theta'} \approx \\
&\approx \kappa'^2 - n'^2 + \frac{2n'^2}{\cos^2 \theta'}
\end{aligned} \tag{115}$$

Így a (114) törési törvényből ez az igen egyszerű formula lesz:

$$\frac{n'}{\cos \theta'} \sin \theta' \approx n \sin \theta \Rightarrow \operatorname{tg} \theta' \approx \frac{n \sin \theta}{n'}, \tag{116}$$

ami alumínium esetén ($n' = 1,2$; $\kappa' = 7,0$) 1%-nál pontosabban közelíti a valódi törési szöget a teljes 0..90°-os beesési szögtartományon! Mivel a tangens értéke mindig nagyobb a szinusznál, (116) azt jelenti, hogy a törési szög fémekben kisebb mint dielektrikumok esetében.

4. A GEOMETRIAI OPTIKA ELMÉLETI ALAPJAI

Források: [1], [3], [6]

Geometriai optika: közelítés, amely a fényterjedést és különböző közegek határán való áthaladást geometriai alakzatok – nevezetesen görbék segítségével írja le. Ezen görbéket *fénysugaraknak* nevezzük.

4.1. A felhasznált közelítések

- irányfüggés** – csak izotróp közegeket tekintünk, pl. üveget (ekkor az 1. és 2. sugárdefiníció ugyanazt adja, azaz a fénysugár $\parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{S}$, ld. 5.1 és 5.2 alfejezetek)
- helyfüggés** – homogén és inhomogén közegeket tekintünk (a fénysugarak görbék is lehetnek nem csak egyenesek)
- térerő függés** – csak lineáris közegeket tekintünk (a fénysugarak kölcsönhatás nélkül keresztezhetik egymást; a tér minden pontjában azonos ω a gerjesztés körfrekvenciájával)
- időbeli koherencia** – monokromatikus eset (csak egy hullámhossz van a spektrumban, időben koherens eset) vagy polikromatikus eset (időben inkoherens fény – hullámhossz-komponensekre bontható)
- térbeli koherencia** – térben koherens eset, pl. pontforrás, síkhullám (van hullámfront – csillagfény, lézer) vagy térben inkoherens eset (diffúz fény – pl. statisztikailag független pontforrásokra bontható)

4.2. Alapvető megfontolások

Maxwell egyenletek $\rightarrow$ vektoriális hullámegyenlet:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 ; n^2 = \varepsilon_r \mu_r \quad (\text{Maxwell-reláció}) \quad (117)$$

Ha monokromatikus, ω körfrekvenciájú hullámot vizsgálunk, a megoldás általános alakja lineáris közegekben:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t}. \quad (118)$$

Mivel a gerjesztés időben harmonikus, a komplex formalizmust használjuk az EM tér leírására (tehát $\mathbf{E}$ komplex, amit hullámvonallal jelölünk). Figyeljünk arra, hogy innentől fogva az egyszerűség kedvéért a pozitív fázisterjesztés módszerét használjuk, azaz a fázis siet a terjedés irányában, és késik az idő függvényében ($\tilde{\mathbf{E}} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}^*$). Ezzel a próbafüggvénnyel az egyenlet az időfüggetlen, ún. Helmholtz-egyenlet alakot ölti:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -k^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}). \quad (119)$$

A fenti egyenletben k az ω körfrekvenciájú *síkhullám* hullámszámvektorának hosszát jelöli. Megoldások speciális esetekben:

$$\text{Síkhullám: } \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0 \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_0)} \quad (120)$$

$$\text{Gömbhullám: } \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{E_0}{r} \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r}) \cdot e^{i(kr+\varphi_0)}, \quad (121)$$

ahol $k \triangleq 2\pi/\lambda$, $\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$ pedig egy $\mathbf{r}$ -re lokálisan merőleges egységvektort jelöl. A Helmholtz-egyenlet megoldása általános esetben (ahol $\mathbf{E}_0$ mennyiség valós vektor):

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r})}. \quad (122)$$

Eikonál (εικών = kép görögül): a tér pontjait az elektromágneses hullám fázisviszonyai szerint jellemző skalár mennyiség, jelölése: $S(\mathbf{r})$. A tér $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ helyvektorral jellemzett pontjai között mérhető fáziskülönbség ($\Delta\varphi$) az eikonállal kifejezve:

$$\Delta\varphi = k_0 S(\mathbf{r}_2) - k_0 S(\mathbf{r}_1). \quad (123)$$

Ahhoz, hogy (122)-nek megfelelően beszélhessünk az EM tér fázisviszonyairól, szükséges, hogy létezzen a „fázis” fogalma. Amennyiben ugyanis az $\mathbf{E}_0$ téramplitúdó térben gyorsabban változik, mint a hullámhossz, a fázisállapot térbeli változása elveszti értelmét. Az amplitúdó lassú változása kizárólag egy bizonyos feltétel teljesülése esetén valósul meg (ld. 4.3 alfejezet), aminek a szerepe az optikában, és általában a hullámtanban jelentős. Emiatt az alábbiakban röviden megvizsgáljuk ezt az esetet.

4.3. Lassan változó amplitúdójú közelítés

A térbeli pozíció $\mathbf{r}_0$ helyvektor körüli kismértékű ($\Delta\mathbf{r}$) helyzetváltozás esetén a térerősség a következő alakban közelíthető:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) &\approx \Delta\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = \Delta(\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)}) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = \\ &= \Delta\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} + \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (124)$$

Ha feltételezzük, hogy a térerősség amplitúdója térben sokkal lassabban változik mint a fázis, akkor az első tagot elhanyagolhatjuk:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) &\approx \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = \\ &= \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) \left(e^{i(k_0 \text{grad}(S(\mathbf{r}_0))\Delta\mathbf{r} + k_0 S(\mathbf{r}_0))} - e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \right) + \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (125)$$

A negatív előjelű tag pont akkora mint az utolsó konstans, tehát

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot e^{ik_0 \text{grad}(S(\mathbf{r}_0))\Delta\mathbf{r}}, \quad (126)$$

ami nem más mint egy síkhullám egyenlete, ahol a lokális hullámszámvektor:

$$\mathbf{k}_{\text{lok}} = k_0 \cdot \text{grad}(S(\mathbf{r}_0)). \quad (127)$$

Ez az összefüggés úgy értelmezhető, hogy lassan változó amplitúdójú közelítésben az EM tér lokálisan úgy viselkedik mint egy síkhullám, a térerősség változását pedig elsősorban a fázis megváltozása vezérli és nem az amplitúdójé. Ez egyben azt is jelenti, hogy *hullámhosszról* csak és kizárólag a lassan változó amplitúdójú közelítésben van értelme beszélni. Később, a geometriai optikai közelítés bevezetése után (127) további értelmet fog nyerni.

Most azt vizsgáljuk meg, hogy mit jelent (124)-ben a térerősségamplitúdó megváltozásának elhanyagolása. Ha $\mathbf{J}$ a Jakobi-mátrix (129), akkor a megváltozás a következő alakban írható föl:

$$\begin{aligned} |\Delta\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)}| &\ll |\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)}| \Rightarrow \\ \Rightarrow |\mathbf{J}\Delta\mathbf{r} \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)}| &\ll |\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}_0) \cdot (ik_0 \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot \text{grad}(S(\mathbf{r}_0)) \cdot \Delta\mathbf{r})|. \end{aligned} \quad (128)$$

$$\mathbf{J} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (129)$$

Csak az x -vektorkomponenst kifejtve és egyszerűsítve a fázistényezővel:

$$|\text{grad}(E_{0x}) \cdot \Delta \mathbf{r}| \ll E_{0x} \cdot k_0 \cdot |\text{grad}(S(\mathbf{r}_0)) \cdot \Delta \mathbf{r}|, \quad (130)$$

és a hibát felülről becsülve (azaz feltesszük, hogy $\Delta \mathbf{r} \parallel \text{grad}(E_{0x})$):

$$\frac{|\text{grad}(E_{0x})|}{E_{0x}} \ll k_0 \cdot |\text{grad}(S(\mathbf{r}_0))|. \quad (131)$$

Az összefüggést geometriai optikai közelítésben fogjuk tudni jól értelmezni, ld. alább.

4.4. A geometriai optika alapegyenlete, érvényességi feltételek

A Helmholtz-egyenlet vektoriális, de mivel a Laplace-operátor skalár mennyiség, az egyenlet szétbontható független vektorkomponensekre (E_x , E_y , E_z). Csak az x -komponenst vizsgálva tehát:

$$\nabla^2 \tilde{E}_x(\mathbf{r}) = -k^2 \tilde{E}_x(\mathbf{r}). \quad (132)$$

Ebbe behelyettesítjük a (122) próbafüggvényt:

$$\nabla^2 (E_{0x}(\mathbf{r}) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r})}) = -k^2 \cdot E_{0x}(\mathbf{r}) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r})}. \quad (133)$$

Itt jól látható, hogy a valós vektoramplitúdó (E_{0x}) és az eikonál (S) helyfüggőek, tehát a továbbiakban ezt nem jelöljük. Az alábbi vektorazonossággal az egyenlet bal oldala átalakítható:

$$\nabla^2(a \cdot b) \equiv a \cdot \nabla^2 b + 2\nabla a \cdot \nabla b + b \cdot \nabla^2 a. \quad (134)$$

Az új egyenlet így (az $(\mathbf{r})$ helyfüggést már nem jelölve):

$$E_{0x} \cdot \nabla^2 e^{ik_0 S} + 2\nabla E_{0x} \cdot \nabla e^{ik_0 S} + e^{ik_0 S} \cdot \nabla^2 E_{0x} = -k^2 \cdot E_{0x} \cdot e^{ik_0 S}. \quad (135)$$

Az első tagnál elvégzünk egy azonos átalakítást $\nabla^2 u \equiv \nabla \cdot \nabla u$ alapján:

$$\nabla^2 e^{ik_0 S} = \nabla(\nabla e^{ik_0 S}) = \nabla(ik_0 \cdot e^{ik_0 S} \cdot \nabla S) = -k_0^2 \cdot e^{ik_0 S} \cdot \nabla S \cdot \nabla S + \nabla^2 S \cdot ik_0 \cdot e^{ik_0 S} \quad (136)$$

ahol felhasználtuk még $\nabla(a \cdot b) \equiv a \nabla b + b \nabla a$ -et is. A második tag egyszerűen átalakítható a láncszabály alkalmazásával:

$$\nabla e^{ik_0 S} = ik_0 \cdot e^{ik_0 S} \cdot \nabla S. \quad (137)$$

(136)-et, (137)-t visszahelyettesítve (135)-be, és a minden tagban szereplő $e^{ik_0 S}$ tényezővel egyszerűsítve a következőt kapjuk:

$$-k_0^2 \cdot E_{0x} \cdot \nabla S \cdot \nabla S + E_{0x} \cdot \nabla^2 S \cdot ik_0 + 2\nabla E_{0x} \cdot ik_0 \cdot \nabla S + \nabla^2 E_{0x} = -k^2 \cdot E_{0x}. \quad (138)$$

Ennek az összefüggésnek van valós és képzetes része, mindkettőnek egyenlőnek kell lennie. A valós részek egyenlősége alapján:

$$-k_0^2 \cdot E_{0x} \cdot |\nabla S|^2 + \nabla^2 E_{0x} = -k^2 \cdot E_{0x}. \quad (139)$$

Amennyiben

$$|\nabla^2 E_{0x}| \ll k^2 \cdot E_{0x} \Rightarrow \frac{|\nabla^2 E_{0x}| \cdot \lambda^2}{E_{0x}} \ll 4\pi^2, \quad (140)$$

így (139) egyenletből kiesik a térerősség:

$$k_0^2 \cdot |\nabla S|^2 = k^2 \Rightarrow |\nabla S|^2 = n^2. \quad (141)$$

Ez a geometriai optika alapegyenlete, az ún. *eikonál-egyenlet*. Egyszerű alakja azt fejezi ki, hogy a geometriai optika közelítésének érvényessége esetén az EM tér fázisváltozásait nem befolyásolja a térerősségamplitúdó változása, csupán a törésmutató-eloszlás. Az eikonál-egyenletből következik, hogy

$$|\text{grad}(S(\mathbf{r}))| = n(\mathbf{r}), \quad (142)$$

ahol $n(\mathbf{r})$ a lokális törésmutató. Az eikonál-egyenletet peremfeltételekkel együtt megoldva (azaz az S értékét ismerni kell egy felület mentén) megkaphatjuk az eikonál értékét a tér minden pontjában.

A fentieknek megfelelően a geometriai optikai közelítés csak akkor teljesül, ha mind a (131) és (140) feltételek ki vannak elégítve. Ennek szemléletes jelentését az alábbiakban nézzük meg.

4.5. Lokális síkhullámú közelítés

Ha a (131) feltétel mellett teljesül a geometriai optika alapfeltétele is, azaz érvényes az eikonál-egyenlet, akkor $n = |\text{grad}(S)|$, vagyis (127) alapján a lokális hullámszámvektor hossza:

$$k_{\text{lok}} = k_0 \cdot n(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) \Rightarrow \lambda_{\text{lok}}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_0}{n(\mathbf{r})}. \quad (143)$$

A (126), (127) összefüggések fontossága itt érthető meg: azt mutatják, hogy geometriai optikai közelítésben a fény a lokális hullámfrontnormális irányába terjed, fázisváltozását pedig kizárólag a törésmutató-eloszlás határozza meg. (Diffrakciós jelenségeknél ez nem feltétlenül van így: a fázis értékét a tér egy adott pontjában a térerősségamplitúdó is befolyásolhatja.) Mivel ekkor a hullámhossz éppen megegyezik az adott törésmutatójú közegben terjedő, szintén ω körfrekvenciájú *síkhullám hullámhosszával*, ezért szokták a geometriai optikát *lokális síkhullámú közelítésnek* is hívni, bár ez némileg félrevezető lehet, hiszen a hullámfrontok itt is lehetnek görbült felületek, feltéve, hogy a görbületi sugaruk sokkal nagyobb a hullámhossznál.

A lassan változó amplitúdójú közelítés feltétele is geometriai optikai közelítésben értelmezhető kényelmesen. Az eikonál-egyenlet értelmében, némi átrendezés után (131)-ből a következőt kapjuk:

$$\frac{|\text{grad}(E_{0x})| \cdot \lambda}{E_{0x}} \ll 2\pi. \quad (144)$$

A fenti kifejezés vagy úgy értelmezhető, hogy hullámhossznyi szakaszon a relatív térerősségamplitúdó-változásnak elhanyagolható mértékűnek kell lennie, vagy pedig úgy, hogy a hullámhossznak kell sokkal kisebbnek lennie mint a térerősségváltozás jellemző térbeli kiterjedése (nulla hullámhosszúságú közelítés). Ennek szemléltetéséhez, ill. megértéséhez tételezzük fel, hogy a térerősségamplitúdó csak x -irányban változik, és rendezzük át (144)-et:

$$\lambda \ll 2\pi \left| \frac{\partial x}{\partial E_{0x}} \cdot E_{0x} \right|. \quad (145)$$

Itt az abszolútérték függvényben lévő mennyiség annak a távolságnak felel meg, amelyen az E_{0x} térerősségamplitúdó 0-ra csökken (elsőrendű közelítésben).

A (140) és (144) feltételek csak akkor teljesülnek egyszerre, azaz akkor vagyunk a geometriai optika érvényességi körén belül, ha a térerősség-amplitúdó relatív megváltozása (valamint a második derivált) hullámhossznyi szakaszon elhanyagolható mértékű. Az állítás megfordítva talán még érthetőbb: akkor használhatjuk a geometriai optikát, ha a hullámhossz nagyon kicsi az EM tér amplitúdó-változásainak jellemző térbeli kiterjedéséhez képest (az amplitúdó nem befolyásolja a fázist). Emiatt a geometriai optikát gyakran szokás „*nulla hullámhosszúságú*” közelítésnek is nevezni. Ez nem teljesül pl. árnyék szélén vagy fókuszpont közelében, ahol az előbbi esetben a geometriai optika E-ben szakadást, utóbbi esetben pedig szingularitást eredményezne.

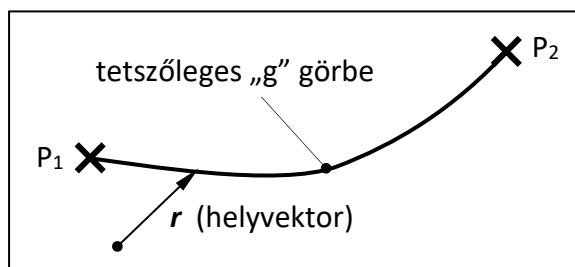
Az eikonál-egyenlet legfőbb alkalmazási területe az *inhomogén közegek* számítása. Példák:

- légköri effektusok (naplemente, délibáb)
- fénytörés gravitációs térben lévő folyadékokban
- szemlencse
- bizonyos planár hullámvezető lencsék
- gradiens lencsék száloptikához, lézerdiódához, leképezéshez
- elektronoptikák
- gravitációs lencsék.

5. FÉNYTERJEDÉS MODELLEZÉSE SUGÁROPTIKAI ESZKÖZÖKKEL

5.1. Fázisviszonyok leírása a geometriai optikában

Hullámfront: $S(\mathbf{r}) = \text{állandó}$ (fázisfront, konstans fázisú felület) ; $\mathbf{k} = k_0 \cdot \nabla S$



15. ábra. Az eikonál gradiensét tetszőleges görbén integrálva a fáziskülönbséget kapjuk.

(123) alapján, geometriai optikai közelítésben, a következő integrálással kaphatjuk meg az elektromágneses tér $\Delta\varphi$ fáziskésését a tér két pontja között (ld. 15. ábra):

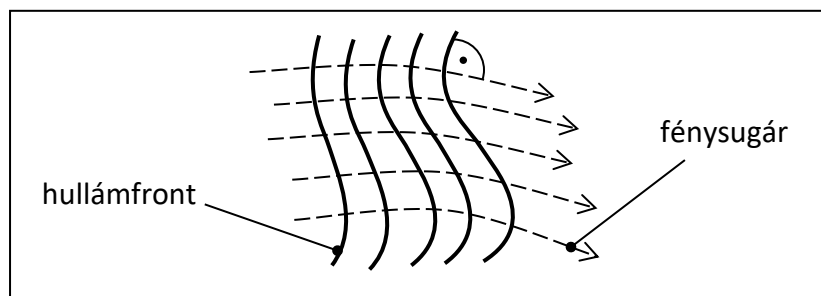
$$\Delta\varphi(P_1, P_2) = k_0(S(P_2) - S(P_1)) = \int_g k_0 \cdot \text{grad}(S(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{r}, \quad (146)$$

ahol „g” tetszőleges görbe. Amennyiben a fény eljut P_1 -ből P_2 -be, értelemszerűen kell léteznie legalább egy olyan g' görbének, amelyre teljesül az, hogy érintője minden pontban a lokális hullámterjedés $\text{grad}(S(\mathbf{r}))$ irányába mutat. Erre a görbére a fáziskésés:

$$\Delta\varphi(P_1, P_2) = k_0 \int_{g'} |\text{grad}(S(\mathbf{r}))| dr = k_0 \int_{g'} n(\mathbf{r}) dr = k_0 \cdot OPL(P_1, P_2), \quad (147)$$

ahol felhasználtuk (142)-t, és OPL (Optical Path Length) az *optikai úthossz* P_1 és P_2 között. A fenti egyenletet (146)-el összevetve: $\Delta S = OPL$, g' mentén történő integrálás esetén! A g' speciális görbe további tulajdonsága, hogy minden pontban merőleges a hullámfrontokra, mivel érintője $\text{grad}(S)$ irányú, amely vektor pedig definíció szerint merőleges az $S = \text{áll.}$ felületekre, azaz a hullámfrontokra. A fent definiált g' görbéket *fénysugaraknak* nevezzük. Az eikonál-egyenlet érzéketlen a $\text{grad}(S)$ előjelére (azaz a fénysugár irányára), ami megfelel annak az állításnak, hogy a fénysugarak megfordíthatók.

Fénysugár-definíció 1.: a fénysugár olyan görbe, amely minden pontban merőleges a hullámfrontokra, illetve érintője $\text{grad}(S)$ irányába mutat. Mivel a hullámszámvektor ($\mathbf{k}$) definíció szerint merőleges a hullámfrontokra, a fénysugár érintője $\mathbf{k}$ irányába mutat. Ha az optikai úthosszat fénysugár mentén mérjük $\Delta S = OPL$.



16. ábra. A hullámfrontok és fénysugarak kapcsolata.

Fénytörés közeghatáron: Igazolható (ld. pl. [6]), hogy közeghatárhoz érve a geometriai optikai közelítésben a fénysugarakra érvényes a Snellius-Descartes törvény. Mivel a törési törvény általános érvényessége síkhullámokra levezethető (ld. korábban), ez az összefüggés tovább növeli a lokális síkhullámú közelítés analógiáját.

5.2. Energetikai viszonyok leírása a geometriai optikában

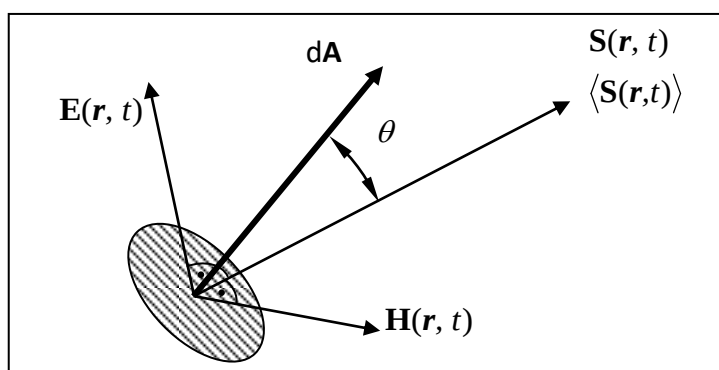
Poynting-vektor: $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ (teljesítmény-sűrűség vektor, $\mathbf{E} = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}\}$!)

A teljesítmény-sűrűség vektor időátlaga monokromatikus tér esetében izotróp dielektrikumban, geometriai optikai közelítésben:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}_0^*(\mathbf{r})}{2} = \frac{\mathbf{k}}{\mu\omega} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})|^2}{2} = \frac{k}{\mu\omega} \frac{E_0(\mathbf{r})^2}{2} \cdot \frac{\nabla S}{n} = \frac{k_0}{\mu\omega} \frac{E_0(\mathbf{r})^2}{2} \cdot \nabla S. \quad (148)$$

E vektor hosszát nevezzük „ I ” *intenzitásnak*. Egy infinitezimális dA felületen áthaladó teljesítmény az intenzitás segítségével a következőképpen írható fel, ld. 17. ábra:

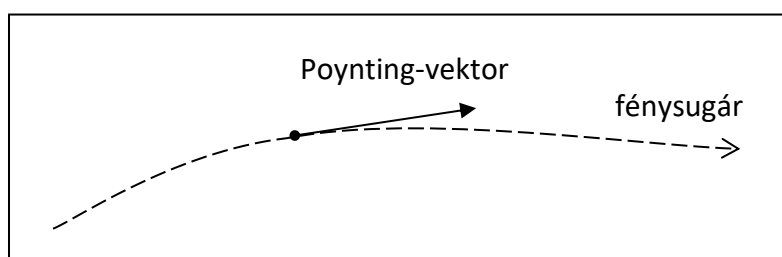
$$dP(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle \cdot d\mathbf{A} = I(\mathbf{r}) \cdot dA \cdot \cos(\theta) \quad (149)$$



17. ábra. A Poynting-vektor, a térerősségvektorok és a felületnormális elhelyezkedése.

A (148) egyenlet azt is igazolja, hogy a geometriai optika érvényességi feltételének fennállása esetén izotróp közegben a Poynting-vektor és az eikonál gradiense egy irányba mutat.

Fénysugár-definíció 2.: olyan görbe, amelynek érintője minden pontban a teljesítmény-sűrűség vektor irányába mutat, ld. 18 ábra. Az 1. és 2. definíció *izotróp* közegben egyenértékű.



18. ábra. A fénysugár érintője a Poynting-vektor irányába mutat.

Fénynyaláb: fénysugarak által határolt csőszerű tartomány, amelyből az energia nem képes kilépni kivéve az első és hátsó felületeken át (a geometriai közelítés érvényességi körén belül).

5.3. A geometriai optika intenzitástörvénye

A (138) egyenlet képzetes részeinek egyenlőségéből pedig a következő összefüggést kapjuk:

$$E_{0x} \cdot \nabla^2 S + 2\nabla E_{0x} \nabla S = 0, \quad (150)$$

ami az ún. *transzport-egyenlet*, forrásmentes esetben. Ennek segítségével az eikonál ismeretében a térerősség pontról-pontra meghatározható. Érdekes észrevenni, hogy ezen egyenlet felírásánál nem használtuk a geometriai optikai közelítést, csak a lassan változó amplitúdójét.

A (150) transzport-egyenlet egyszerű azonos átalakításokkal a következő formára hozható (ld. [7], 7.3 fejezet):

$$\nabla(E_{0x}^2 \cdot \nabla S) = 0, \quad (151)$$

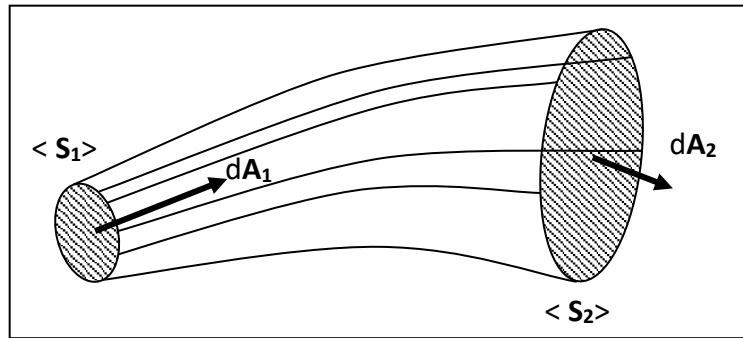
amelyből pl. az látszik, hogy homogén közegben terjedő síkhullám esetén ($\nabla S = \text{const.}$) a térerősség-amplitúdó térben nem változik. A zárójelben szereplő tag arányos az x -térerősségkomponens Poynting-vektorának időátlagával, azaz az intenzitással, ld. (148). Mindhárom térerősségkomponensre fölírva ugyanezt az egyenletet és összegezve az eredményeket a következőt kapjuk:

$$\nabla \langle S \rangle = 0 \Leftrightarrow \oint \langle S \rangle \cdot dA = 0. \quad (152)$$

Mivel a fénysugarak párhuzamosak a Poynting-vektorral, a (152) egyenlet ekvivalens az energiamegmaradás törvényéből is következő összefüggéssel, az infinitezimálisan keskeny fénynyalábokra érvényes ún. *intenzitástörvénnyel*:

$$\langle S_1 \rangle \cdot dA_1 = \langle S_2 \rangle \cdot dA_2, \quad (153)$$

mely olyan (ún. „reguláris”) tértartományban igaz, ahol a fénysugarak nem kereszteződnek.



19. ábra. Az intenzitástörvény szemléltetése egy fénynyaláb esetén.

5.4. A fénysugarak egyenlete ívhossz szerinti paraméterezésben

A fénysugarakat az eikonállal definiáltuk, ezért egyenletüket az eikonál-egyenletből vezetjük le. Fénysugár = térgörbe, jelöljük „ g ”-vel. A g megadása, p paraméter függvényében:

$$g: \mathbf{r} = \mathbf{r}(p) \quad (154)$$

alakú, amit a görbe paraméterezésének nevezünk. A fenti egyenletben $\mathbf{r}$ a fénysugár pályáját letapogató helyvektor. Mivel a fénysugár párhuzamos $\text{grad } S$ -el, valamint $\text{grad } S(\mathbf{r}) \perp S(\mathbf{r}) = \text{const.}$ (hullámfront), és $d\mathbf{r}(p)/dp \parallel g$ görbe érintője, felírható, hogy:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} \sim \text{grad}(S(\mathbf{r})). \quad (155)$$

A g görbéknek végtelen sok paraméterezése létezik, mert ha $\mathbf{r}(p)$ paraméterezés, akkor $\mathbf{r}(q(p))$ is az, feltéve, hogy $q(p)$ szig. mon. folytonos és az első deriváltja is folytonos. Emiatt a sugarak egyenlete tartalmaz egy határozatlan függvényt. Egy adott görbe két paraméterezésének a deriváltjai között a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} = \frac{d\mathbf{r}(q)}{dq} \frac{dq}{dp}, \quad (156)$$

ha $q(p)$ jelenti a kapcsolatot a két paraméter között. Mivel dq/dp skalár mennyiség, a fenti kifejezés azt jelenti, hogy egy görbe különböző paraméterek szerinti deriváltvektorai mind ugyanabba az irányba mutatnak (a görbe érintője), csak a nagyságuk eltérő. Ezek szerint bizonyosan létezik egy olyan $\mathbf{r}(q)$ paraméterezés, amire igaz, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}(q)}{dq} = \text{grad}(S(\mathbf{r})). \quad (157)$$

A (157) összefüggést behelyettesítve (156)-be a következőt kapjuk:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} = \frac{dq}{dp} \cdot \text{grad}(S(\mathbf{r})) = f(p) \cdot \text{grad}(S(\mathbf{r})), \quad (158)$$

ahol $f(p)$ egy tetszőleges függvény, amely az $\mathbf{r}(p)$ görbe alakját nem befolyásolja, csak a paraméterezését. Amennyiben az $f(p) = 1/n(\mathbf{r})$ függvényt választjuk, (158)-ból a következő lesz:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} = \frac{\text{grad}(S(\mathbf{r}))}{n(\mathbf{r})}. \quad (159)$$

Az eikonál-egyenlet miatt ez egy egységvektor, és matematikából tudjuk, hogy egy görbe ívhossz szerinti deriváltja az az érintő irányú egységvektor. Vagyis ekkor $p = s$, ami a fénysugár mentén mért ívhossz. Ezt beírva a (159) egyenletbe, és kicsit átrendezve:

$$n(\mathbf{r}(s)) \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \nabla S(\mathbf{r}(s)). \quad (160)$$

Az eikonál helyett a gyakorlatban kényelmesebb a törésmutatóval számolni. A (141) eikonálegyenlet alapján ez úgy tehető meg, ha (160)-ba valahogy be tudjuk hozni $|\nabla S|^2$ -et. Ehhez először ívhossz szerint deriváljuk még egyszer:

$$\frac{d}{ds} \left(n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \nabla S. \quad (161)$$

Ezután alakítsuk át az egyenlet jobb oldalát az alábbiak szerint:

$$\frac{d}{ds} \nabla S = (\nabla \cdot \nabla S) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (162)$$

majd ebben $d\mathbf{r}(s)/ds$ helyére írjuk be a (159) összefüggést:

$$(\nabla \cdot \nabla S) \cdot \frac{\nabla S}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \nabla \cdot |\nabla S|^2. \quad \left(\text{Id. } \frac{df^2}{dx} = 2f \cdot \frac{df}{dx} \right) \quad (163)$$

Az eikonálegyenlet felhasználásával a kifejezés tovább egyszerűsödik:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \nabla(n^2) = \nabla n = \text{grad}(n). \quad (164)$$

Ezt egyenlővé téve (161) bal oldalával megkapjuk a sugarak ívhossz-szerinti paraméterezésben felírt differenciálegyenletét:

$$\frac{d}{ds} \left(n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad}(n), \quad (165)$$

ahol $\mathbf{r}(s)$ a megoldásgörbe paraméterezése. Példa – homogén közegek esete ($n = \text{const.}$). Ekkor a sugarak differenciálegyenlete a következő alakra egyszerűsödik:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0, \quad (166)$$

aminek a megoldását kétszeres integrálás után megkapjuk:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot s + \mathbf{b}, \quad (167)$$

ahol $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ tetszőleges (a peremfeltételek által meghatározott) konstans vektorok. Ez azt jelenti, hogy homogén közegben a fénysugár egyenes vonal, amely áthalad a $\mathbf{b}$ -vel megjelölt ponton, és $\mathbf{a}$ irányba mutat.

6. A GEOMETRIAI OPTIKA PARAXIÁLIS KÖZELÍTÉSE

A geometriai optika alkalmazási területei

- képképzőrendszerek (mi ezzel foglalkozunk)
- megvilágítórendszerek (ld. a különálló „Megvilágítórendszerek tervezése” tárgyat)

Képképző- és megvilágítórendszerek geometriai modellezésénél a tárgyat / fényforrást térben koherens források (pontforrások) összegére bontjuk.

Geometriai optikai közelítések a képképzésben

- valós sugárátvezetés (törés, terjedés ismételtetése) → képképzési hibák, optimalizáció
- harmadrendű közelítés (aberráció elmélet) → képképzési hibák analízise
- elsőrendű (paraxiális) közelítés → nagyítás, tárgy-kép helyzet, fényerő, max. felbontás

Ideális képképzés – egyszerűsített definíció

- pontot pontba képez le, azaz a képpont és a tárgypont „konjugáltjai” egymásnak
- a képképző rendszerben van egy önmagába képződő tengely (pl. forgásszimmetrikus), ez az ún. optikai tengely
- optikai tengelyre merőleges síkban lévő geometriai alakzatok hasonló alakzatokba képződnek le (azaz torzításmentesen)

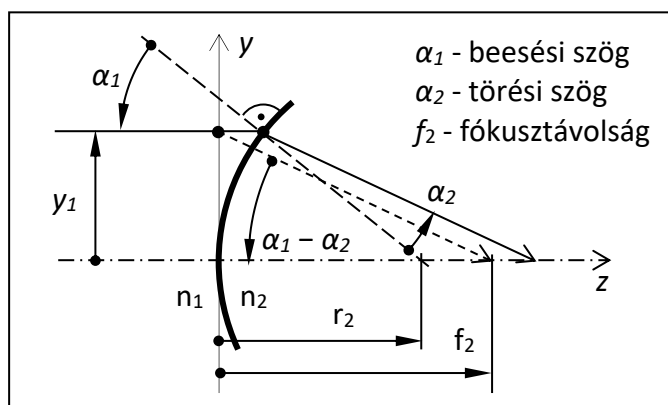
Ideális képképzés esetén a tárgy és képpont között végtelen számú fénysugár-pályát találhatunk. A Fermat-el értelmében viszont csak azon görbe mentén haladhat a fény, ahol az optikai úthossz első rendben stacionárius. A látszólagos ellentmondás feloldása az, hogy a tárgy és képpont közötti összes fénysugár mentén az optikai úthossz *megegyezik*.

6.1. Elsőrendű (paraxiális) közelítés (Gauss-optika)

A paraxiális közelítés feltételei:

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta \quad [\theta] = \text{rad} ; \text{ (ezért „elsőrendű” a közelítés)}$$
$$y \ll r \quad \text{előjeles mennyiségek!}$$

Azaz a paraxiális fénysugarak az optikai tengely közelében, vele kis szöget bezárva haladnak, és a felületek *síkkal közelíthetők*. Ezekből következnek: gömbhullám ~ paraboloid felület.



20. ábra. Egy gömbi törőfelület fókusz távolságának meghatározása paraxiális közelítésben.

Fókuszpont: az optikai tengelyen lévő, végtelen távoli tárgypont képe (parax. közelítésben!)

Fókusz távolság meghatározása egyetlen törőfelület esetén:

$$\left. \begin{array}{ll} n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2 & \text{fénytörés} \\ \alpha_1 r_2 = y_1 & \text{felületnormális} \\ f_2(\alpha_1 - \alpha_2) = y_1 & \text{ideális leképezés} \end{array} \right\} \Rightarrow f_2 = r_2 \frac{n_2}{n_2 - n_1} \quad [\alpha] = \text{rad!} \quad (168)$$

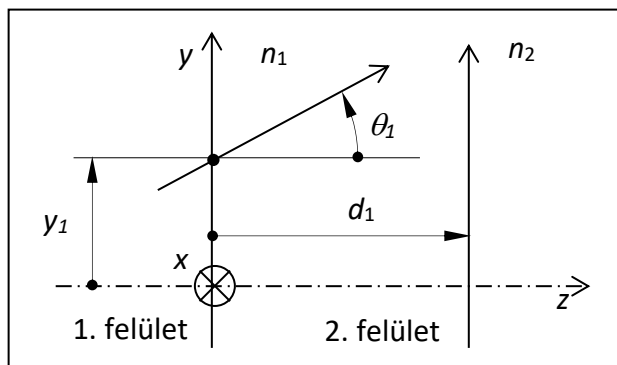
Tükör tárgyalása formálisan: $n_2 = -n_1$. Törőerő:

$$P_2 \triangleq \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_2} \quad [\text{dioptria} \triangleq \text{m}^{-1}] \quad (169)$$

A törőerőt angol nyelvű szakirodalomban szokták ϕ szimbólummal is jelölni. Két, nulla távolságra egymás mögé helyezett (1. és 2. sz.) felület esetén:

$$P_{\text{eredő}} = P_1 + P_2 \quad (170)$$

Paraxiális közelítésben a fénytörés ill. szabadtéri terjedés az x - z és y - z síkokban egymástól függetlenül számolható! Ez a közelítés teljesíti az ideális leképezés feltételeit! (A levezetést ld. [6], I. kötet, 2.3.4 alfejezet.)



21. ábra. A fénysugar-koordináták szemléltetése.

A paraxiális közelítés alapkérdése az, hogy ha egy adott 1. síkon adott a fénysugar pozíciója és iránya (y_1 ; θ_1), akkor egy további 2. síkon mekkora (y_2 ; θ_2). Mivel a közelítés lineáris, a válasz mátrixos formában fogalmazható meg. Az x - z / y - z függetlenség miatt csak y - z síkban felírva:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ n_2 \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ n_1 \theta_1 \end{bmatrix} \quad (171)$$

A fénysugar irányát leíró $n \cdot \theta$ mennyiséget *optikai iránykoszinusznak* nevezzük. Hengerszimmetrikus rendszerben az x - z irányban felírt egyenletrendszernek is ugyanaz az $ABCD$ mátrixa a vizsgált 1.-2. síkok között mint a fent bemutatott. (171) alapján a fénysugarak helykoorináta-transzformációja a következő egyenletekkel írható le:

$$\begin{aligned} y_2 &= A \cdot y_1 + B \cdot (n_1 \theta_1) \\ n_2 \theta_2 &= C \cdot y_1 + D \cdot (n_1 \theta_1) \end{aligned} \quad (172)$$

Amennyiben a síkpár két tagja között leképezés áll fenn, az y_2 helykoorináta független a fénysugar indulási irányától, ami csak akkor lehet igaz, ha $B = 0$. Ekkor igen könnyen belátható hogy:

$$\begin{aligned} A &= m \\ D &= m_\alpha \cdot \frac{n_2}{n_1} \quad \text{ha } y_1 = 0 \end{aligned} \quad (173)$$

Az m és m_α definícióit ld. 6.2-ben. A gömbi felületen létrejövő fénytörés $ABCD$ mátrixa (ha a két sík egybeesik egymással és atörőfelülettel):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (174)$$

ahol P_1 a felület törőereje (értelmezést ld. fentebb). Szabadtéri terjedés $ABCD$ mátrixa:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & d_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (175)$$

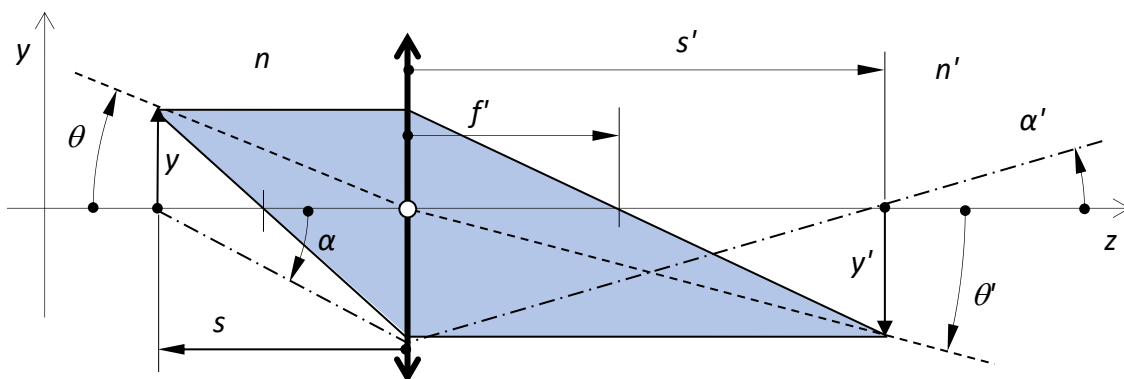
ahol d_1 az 1. és 2. sík távolsága, n_1 a közöttük mért törésmutató. Itt fontos észrevenni, hogy a sík felületeknek zérus a törőerejük. Egy N felületből álló összetett rendszer $\mathbf{M}$ mátrixát értelemszerűen a fenti elemi mátrixok szorzata adja:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_N \cdot \mathbf{R}_N \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T}_1. \quad (176)$$

6.2. Képszerkesztés vékonylencse esetén, paraxiális képalkotás jellemzői

vastagság $\ll$ lencsefelületek görbületi sugarai

- s, s' – tárgy-, képtávolság
- f' – képoldali fókusz távolság ($f' = s'$, ha $s = -\infty$)
- y, y' – tárgy-, képmagasság
- θ, θ' – tárgyszög, képszög (törési törvényből: $n \cdot \theta = n' \cdot \theta'$)
- m – transzverzális nagyítás ($m \triangleq y'/y$)
- m_L – longitudinális nagyítás ($m_L \triangleq \partial s' / \partial s$)
- m_α – szögnagyítás ($m_\alpha \triangleq \alpha' / \alpha$)
- NA – tárgyardali numerikus apertúra ($NA \triangleq n \cdot \sin \alpha$) – ez nem paraxiális mennyiség



22. ábra. Leképezés megszerkesztése vékonylencse esetén. A távolságok és szögek előjeles mennyiségek! Tehát az ábrán $s' > 0$, de $s < 0$, és $\alpha' > 0$ de $\alpha < 0$.

Könnyen levezethető, alapvető paraxiális törvényszerűségek (nem csak vékonylencsék esetén érvényesek, ld. fősíkok alább):

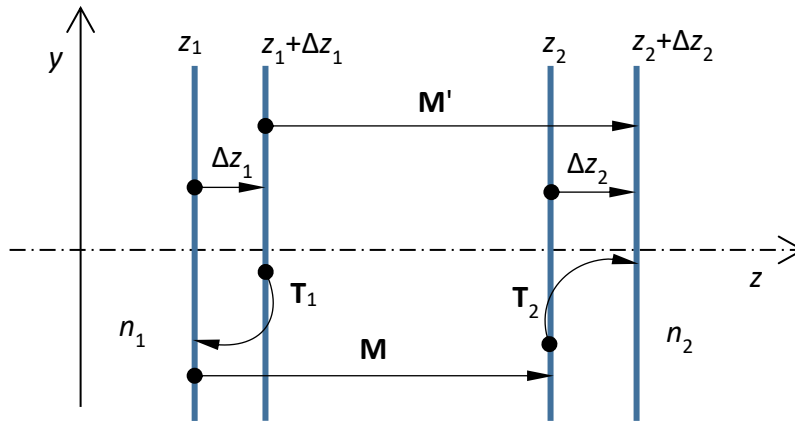
$$\begin{aligned}
 m &= \frac{s'}{s} \cdot \frac{n}{n'} \\
 m_L &= \frac{n'}{n} \cdot m^2 \\
 m_\alpha \cdot m &= \frac{n}{n'} \quad (\text{Lagrange – Helmholtz – egyenlet}) \Rightarrow A \cdot D = 1 \\
 \frac{n}{f} &= -\frac{n'}{f'}
 \end{aligned} \tag{177}$$

6.3. Ideális leképezés összetett optikai rendszerrel

Tétel: paraxiális közelítésben minden optikai rendszer ideálisan képezi le egy homogén tárgytér minden pontját egy homogén képtérbe, ha létezik legalább egy olyan sugár, amelyik mind a tárgytérben mind a képtérben metszi az optikai tengelyt.

Az alábbiakban megnézzük e tétel levezetését. Legyen egy optikai rendszernél a z_1 - z_2 síkpár az, ahol e metszés bekövetkezik, és jellemezzük e két sík közötti fényterjedést az $ABCD$ mátrixszal ($\mathbf{M}$). Ha van egy az optikai tengellyel szöget bezáró fénysugár, amelyre igaz, hogy $y_1 = y_2 = 0$, akkor ez csak úgy lehetséges, ha $B = 0$, vagyis a két sík között leképezésnek kell fönnállnia. A z_1 - z_2 síkpárt *referenciasíkoknak* tekintve most azt vizsgáljuk meg, hogy egy tetszőleges másik $z_1 + \Delta z_1$ helyzetű tárgysíkhöz létezik-e képsík. Ezen feltételezett képsík helye legyen $z_2 + \Delta z_2$. Mivel a $(z_1; z_2)$ síkokhoz tartozó $\mathbf{M}$ mátrixot tekintjük adottnak, ezzel fejezzük ki az eltolt síkpárhoz tartozó $\mathbf{M}'$ mátrixot:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}_1. \tag{178}$$



23. ábra. Magyarázat az $\mathbf{M}'$ mátrix felírásához.

A szabadtéri terjedés mátrixának (175) általános alakja alapján:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta z_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta z_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{179}$$

A mátrixszorzás után a B' együttható értéke (csak ez tartalmazza B -t):

$$B' = B + \frac{\Delta z_2}{n_2} D - \left(A + \frac{\Delta z_2}{n_2} C \right) \frac{\Delta z_1}{n_1}. \quad (180)$$

A két eredeti referenciasík között definíciónk szerint leképezés áll fenn, tehát $B = 0$, valamint a Lagrange-Helmholtz-egyenlet miatt (szintén leképezés esetén):

$$A \cdot D = 1 \quad (181)$$

Vagyis $A'B'C'D'$ -re a következőt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \frac{\Delta z_2}{n_2} C & \frac{\Delta z_2}{A \cdot n_2} - \left(A + \frac{\Delta z_2}{n_2} C \right) \frac{\Delta z_1}{n_1} \\ C & D - \frac{\Delta z_1}{n_1} C \end{bmatrix}. \quad (182)$$

Mivel a fenti számolás alapján $C' = C$, értéke tárgy és képsíkhelyzet-független, tehát C a vizsgált optikai rendszer egy jellemző paramétere. Ennek a jelentősége a 6.4 alfejezetben nyer majd értelmet. Ha a Δz_1 és Δz_2 -vel eltolt síkok között is leképezés áll fenn, akkor $B' = 0$, amiből:

$$\frac{n_2}{\Delta z_2} - \frac{1}{A^2} \frac{n_1}{\Delta z_1} = -\frac{C}{A}. \quad (183)$$

Ez a *lencsetörvény* általános alakja, tetszőleges leképezést leíró referenciasíkokhoz képest.

6.4. Összetett lencserendszerek tárgyalása fősíkok segítségével

Fősíkok: az a tárgy-képsík pár, amelyre definíció szerint igaz: $m = +1$. Ilyen minden optikai rendszernek meghatározható. A fősíkok helyzete *egyértelmű*.

Ha referenciasíknak a fősíkokat választjuk ($A = +1$), (183) az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$\frac{n_2}{\Delta z_2} - \frac{n_1}{\Delta z_1} = -C. \quad (184)$$

Tartson Δz_1 a mínusz végtelenhez. Ekkor Δz_2 definíció szerint a képoldali fókuszpont helyzetét adja:

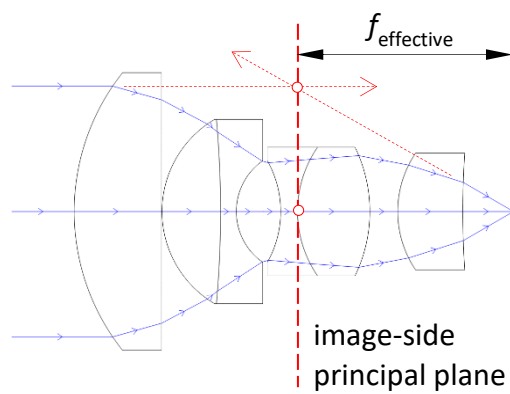
$$f' \triangleq \Delta z_2 ; C = -\frac{n'}{\Delta z_2} = -\frac{n'}{f'} ; P \triangleq \frac{n'}{f'}, \quad (185)$$

ahol bevezettük a törőerő fogalmát (P), valamint a tárgy és képoldali törésmutatókat: $n \triangleq n_1$ és $n' \triangleq n_2$. Az f' képoldali fősíktól mért távolságot *effektív fókusztávolságnak* nevezzük. Ezekkel megkapjuk a lencsetörvény jól ismert, Gauss-féle alakját ($s \triangleq \Delta z_1$ és $s' \triangleq \Delta z_2$):

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'} \Rightarrow \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} + \frac{n}{s}. \quad (186)$$

Ha tehát a fősíkoktól mérjük a tárgy és képtávolságot, illetve a fókusztávolságot (effektív fókusztávolság), akkor tetszőleges lencserendszer esetén érvényes a lencsetörvény!

Speciális lencserendszerek: **teleobjektív**, $f_{\text{effektív}} > \text{szerkezeti hossz}$ (ld. fényképezőgép)
inverz teleobjektív, hátsó fókusztávolság $> f_{\text{effektív}}$ (ld. projektor)



24. ábra. A fókuszok helyzetének grafikus meghatározása. Részleteket ld. az előadáson.

7. KÉTHULLÁMÚ INTERFERENCIA

Források: [1], [3], [6], [8]

7.1. Az interferencia fogalma

Az előzőekben bemutatott geometriai optikai (azaz nulla hullámhosszúságú) közelítésben differenciálegyenletekkel írtuk le az EM hullámok fázisának és intenzitásának térbeli változását. Mivel ennek a tárgyalásmódnak az a feltételezés az alapja, hogy a terjedést nem befolyásolja a tér amplitúdója (csak a törésmutató térbeli eloszlása), a nyaláb egyik részének a másikra gyakorolt hatása így nem írható le. Ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy a geometriai optikai differenciálegyenletek csak reguláris tartományokban használhatók, azaz ott, ahol a hullám egyik irányból érkező része sosem fed át a másik irányból érkező részeivel (másképpen: amikor a fénysugarak nem keresztezik egymást). Emiatt a hiányosság miatt a differenciálegyenletes leírásmódot csak korlátozottan lehet alkalmazni. Helyette inkább az energia és fázisterjedés irányát reprezentáló fénysugarakat használják a fényeloszlás meghatározására. Minden fénysugárhoz rendelhető egy kis teljesítményadag. Ezeket inkoherens (azaz diffúz) megvilágítás esetén az optikai rendszer tetszőleges felületére összegezve meghatározhatjuk az ott áthaladó teljesítményt, felületegységre vonatkoztatva pedig az intenzitást. Egyszerűen megfogalmazva: ahol sűrűbb a fénysugarak felület menti eloszlása ott nagyobb az intenzitás, ahol ritkább ott kisebb. Térben és időben koherens sugárzásokra (pl. lézerefény) az összegzést nem teljesítmény, hanem komplex amplitúdóra vonatkoztatva kell elvégezni – ilyen esetekben interferencia lép fel.

Az interferencia az a jelenség, amikor két v. több diszkrét hullám fázishelyes szuperpozíciója során a térben *állóhullámkép* alakul ki, ami elektromágneses hullámok esetén (általában) sötét-világos interferenciacsíkok formájában figyelhető meg. A modellezését gyakran geometriai optikai közelítésben szokták elvégezni, amikor az interferáló nyalábok fázisát a fénysugarak mentén mért úthosszból határozzák meg, a közegben mért hullámhossznak 2π radián fázistolást megfelelően. A diszkrét szuperpozíció természetesen olyan esetekben is használható, amikor a kölcsönható nyalábok terjedése csak diffrakcióval írható le.

Mi a továbbiakban a geometriai optikai leírásmóddal foglalkozunk. Mint azt már láttuk, az eikonál segítségével a tér fázisának hely- és időfüggése a következőképpen adható meg:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r})} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{i\varphi(\mathbf{r})}, \quad (187)$$

ahol $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ jelöli a térerősség valós vektoramplitúdóját. Itt ismét alkalmazzuk a pozitív térbeli fázisterjedés módszerét. Geometriai optikai közelítésben a lokális hullámszámvektor:

$$\mathbf{k}_{\text{lok}} = k_0 \cdot \text{grad}(S(\mathbf{r})). \quad (188)$$

Mivel $n = |\text{grad}(S)|$, ennek hossza a következő:

$$k_{\text{lok}} = k_0 \cdot n(\mathbf{r}) \Rightarrow \lambda_{\text{lok}}(\mathbf{r}) = \lambda_0 / n(\mathbf{r}). \quad (189)$$

A fény két pont (P_1 és P_2) közötti fáziskülönbsége tehát:

$$\Delta\varphi(P_1, P_2) = k_0 \int_g n(\mathbf{r}) dl = k_0 \cdot OPL(P_1, P_2), \quad (190)$$

ahol $g \mapsto g(\mathbf{r})$ egy tetszőleges fénysugár pályája. A téramplitúdót az egyszerűség kedvéért a továbbiakban skalár mennyiségnek fogjuk tekinteni, vagyis azt feltételezzük, hogy az EM tér polarizációs állapota a fényterjedés során kb. változatlan marad:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \tilde{E}(\mathbf{r}, t) ; \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \rightarrow E_0(\mathbf{r}). \quad (191)$$

Ez akkor igaz, ha a vizsgált fénynyalábok nem zárnak be túl nagy szöget egymással. Az általános esetet a teljesség kedvéért a fejezet végén lévő kiegészítő anyagban tárgyaljuk röviden.

Az interferenciajelenségek csoportosítása

Komponensek alapján: kéthullám

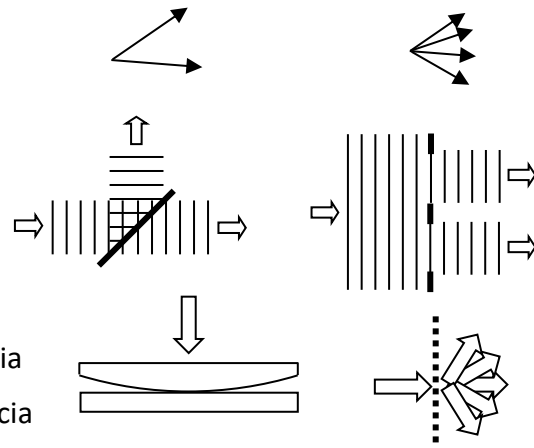
töbhhullám

Létrehozási mód alapján: amplitúdóosztás

hullámfrontosztás

Állóhullám kép alapján: helyfüggő interferencia

irányfüggő interferencia



Fényút alapján:

egyszeres áthaladású vagy kétszeres áthaladású

kétutas vagy közös utas

Közelítések, feltételek, jelölések

Közelítések: homogén, lineáris, izotróp közeg, skalár közelítés

Feltétel 1: azonos frekvencia (különben nincs állóhullám)

Feltétel 2: azonos polarizáció (különben nincs érzékelhető szuperpozíció)

Feltétel 3: térben és időben koherens hullámok
(különben a láthatóság romlik, ld. bővebben később)

Feltétel 4: a hullámok intenzitása legyen azonos (különben a láthatóság romlik)

Jelölések: T – periódusidő

ν – frekvencia ($= 1/T$)

ω – körfrekvencia ($= 2\pi/T$)

λ – hullámhossz (közegben)

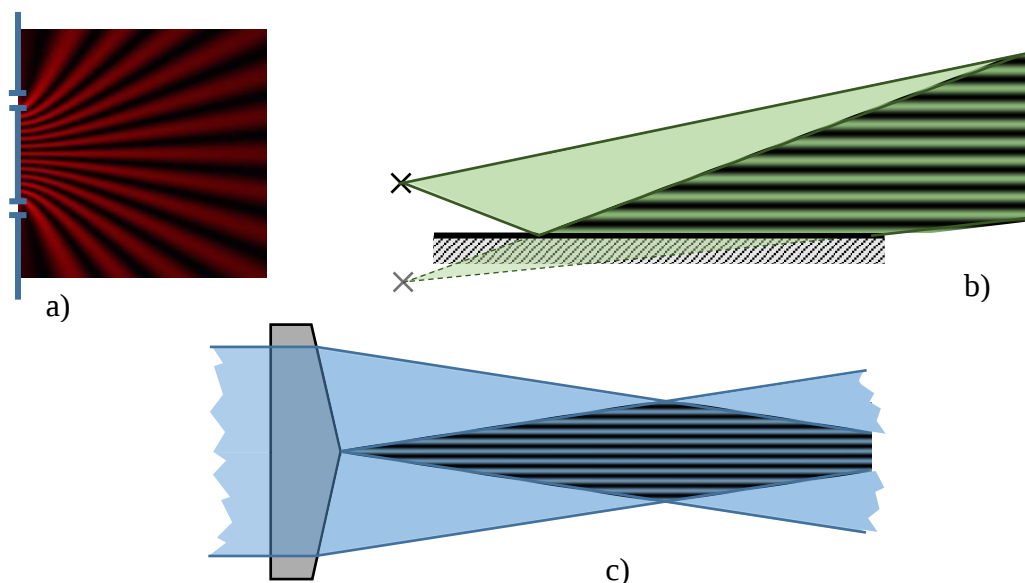
k – hullámszám ($= 2\pi / \lambda$)

v – fény fázissebessége közegben ($= \lambda \cdot \nu = \omega / k$)

Műszaki példák kéthullám interferenciára

Hullámfrontosztó:

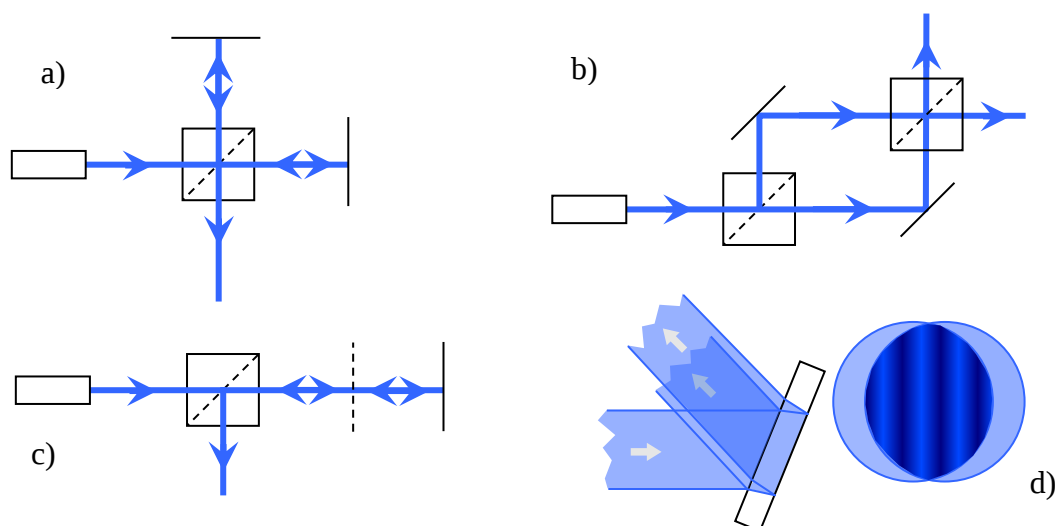
- Young-féle kétréses kísérlet
- Lloyd-tükör
- Fresnel-biprízma



25. ábra. Hullámfrontosztó interferométerek vázlatos felépítése. a) Young-féle kétréses kísérlet, b) Lloyd-tükör, c) Fresnel-féle biprizma.

Amplitúdóosztó:

- a) Michelson-interferométer (ld. még Twyman-Green-interferométer)
- b) Mach-Zehnder-interferométer
- c) Fizeau interferométer (pl. légrés két üveglemez között, Newton-gyűrűk)
- d) Síkpárhuzamos lemez (nyíró interferométer – shearing interferometer)



26. ábra. Példák amplitúdóosztó interferométerekre. d) esetében tökéletesen párhuzamos lemezzel akkor látunk csíkokat, ha a beérkező hullám görbült hullámfrontokkal rendelkezik.

A Michelson-interferométert távolságmérésre, Fourier-transzformációs (FTIR) spektroszkópiára, felületalak mérésre, gravitációs hullám detektálásra (LIGO) használják, a Mach-Zehndert holografikus elrendezésekben, gázok törésmutatójának mérésére vagy kvantumos számításoknál alkalmazzák, Fizeau-interferométereket elsősorban felület és hullámfrontalak mérésre használnak, a nyíró interferométereket pedig lézerek kollimáltságának vizsgálatára/beállítására használják (azaz annak eldöntésére, mennyire sík a hullámfrontjuk).

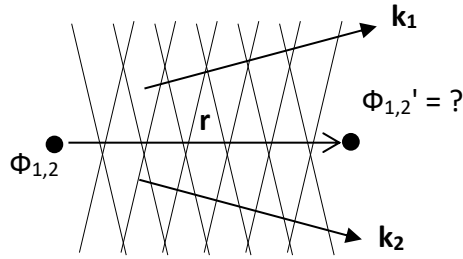
7.2. Két síkhullám interferenciája paraxiális közelítésben

Vizsgáljuk meg a legegyszerűbb esetet, amikor két azonos irányban lineárisan polarizált, de nem azonos irányban terjedő síkhullám találkozik:

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{r}, t) &= E_{01} \cos(-\omega t + \mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \varphi_1) = E_{01} \cos(\Phi_1) \\ E_2(\mathbf{r}, t) &= E_{02} \cos(-\omega t + \mathbf{k}_2 \mathbf{r} + \varphi_2) = E_{02} \cos(\Phi_2) \end{aligned} \quad (192)$$

Ennél a tárgyalásnál kivételesen *valós* terminológiát használunk, az intenzitásszámolásnál ui. így látványosabb lesz az időátlagolás hatása. Az eredő térerősség így:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t). \quad (193)$$



27. ábra. Az alapprobléma felvázolása: két ferdén terjedő síkhullám interferenciája.

A terjedés irányára merőleges teljesítménysűrűséget a Poynting-vektor hossza adja meg:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (194)$$

amely dielektrikumban terjedő síkhullám esetén a következő alakú:

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{k}{\mu\omega} E(\mathbf{r}, t)^2 = v\varepsilon \cdot E(\mathbf{r}, t)^2. \quad (195)$$

A fenti képletben „ v ” jelöli a terjedési (fázis)sebességet. S -nek T időre vett időátlaga az intenzitás:

$$I(\mathbf{r}, T) \triangleq \langle S(\mathbf{r}, t) \rangle \Rightarrow I(\mathbf{r}) = v\varepsilon \cdot \langle E(\mathbf{r}, t)^2 \rangle, \quad (196)$$

mivel harmonikus jel esetén „ I ” T -től független, ha $T \rightarrow \infty$. Amennyiben $\mathbf{k}_1$ közel párhuzamos $\mathbf{k}_2$ -vel, azaz paraxiális közelítésben vagyunk, E helyére síkhullámok összegét is beírhatjuk az eredő intenzitás meghatározása végett. Nagyszögű fényterjedés esetén $\mathbf{E}_1$ és $\mathbf{E}_2$ nem párhuzamos, ami bonyolultabbá teszi a tárgyalást (ld. kiegészítő anyag), bár ugyanarra az eredményre fog vezetni, mint amit itt kapunk. Tehát paraxiális, skalár közelítésben az interferenciakép intenzitása a következő:

$$I(\mathbf{r}) = v\varepsilon \cdot \langle (E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t))^2 \rangle. \quad (197)$$

A négyzetreemelés argumentumába behelyettesítve az (192) térerősségeket:

$$(E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t))^2 = E_{01}^2 \cos^2(\Phi_1) + E_{02}^2 \cos^2(\Phi_2) + 2E_{01}E_{02} \cos(\Phi_1) \cos(\Phi_2). \quad (198)$$

A vegyes szorzat a $2\cos(\alpha)\cos(\beta) \equiv \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$ azonosság felhasználásával:

$$2E_{01}E_{02} \cos(\Phi_1) \cos(\Phi_2) = E_{01}E_{02}(\cos(\Phi_1 - \Phi_2) + \cos(\Phi_1 + \Phi_2)). \quad (199)$$

A fáziskülönbséget leíró tag (192) alapján időfüggetlen:

$$\delta(\mathbf{r}) \triangleq \Phi_1 - \Phi_2 = (\omega - \omega)t + (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r} + (\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \Delta\varphi. \quad (200)$$

A fázisok összege pedig:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 2\omega t + (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r} + (\varphi_1 + \varphi_2), \quad (201)$$

aminek a koszinusza az időátlagolás után zérus. Így (197)-ből a következő marad:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{v\varepsilon}{2} \cdot (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\delta(\mathbf{r}))). \quad (202)$$

Mivel a két nyaláb ω -ja azonos, az átlagolásnál az időfüggő tagok kiesnek, tehát interferencia lép fel: az intenzitáskép időben állandó, és a „cos” függvény miatt periódikusan változik δ -val.

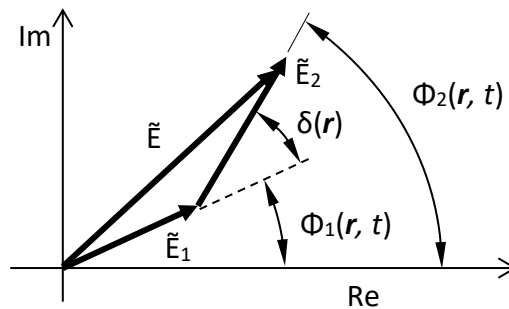
Az interferencia komplex jelölésmóddal egyszerűbben is leírható:

$$I = \frac{v\varepsilon}{2} \cdot (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2) \cdot (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)^* = \frac{v\varepsilon}{2} \cdot (\tilde{E}_1\tilde{E}_1^* + \tilde{E}_2\tilde{E}_2^* + \tilde{E}_1\tilde{E}_2^* + \tilde{E}_2\tilde{E}_1^*), \quad (203)$$

ahol * jelöli a komplex konjugáltat és

$$\tilde{E}_1 = E_{01} \cdot e^{i(-\omega t + \mathbf{k}_1\mathbf{r} + \varphi_1)} \text{ és } \tilde{E}_2 = E_{02} \cdot e^{i(-\omega t + \mathbf{k}_2\mathbf{r} + \varphi_2)}. \quad (204)$$

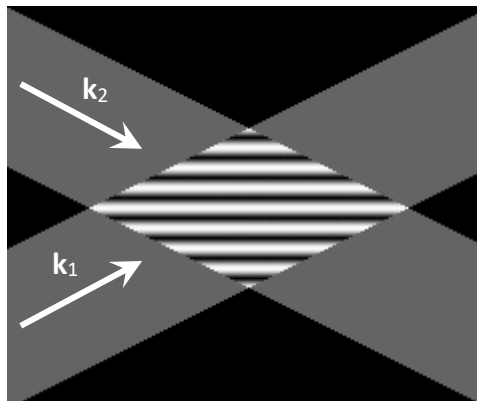
Ez a módszer természetesen ugyanarra vezet mint (202), csak elrejtí elölünk az időátlagolást. Ha a térerősségeket a komplex síkon ábrázoljuk, a jelenség a következő módon értelmezhető:



28. ábra. Fázorösszegezés

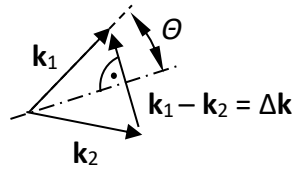
$\Delta\varphi$ -n keresztül a fáziskülönbséghez hozzáadódhat optikai úthosszkülönbség (OPD – Optical Path Difference), vagy időkéscseltetés (Δt):

$$OPD \triangleq OPL_1 - OPL_2 ; \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} OPD ; \Delta t = t_1 - t_2 ; \Delta\varphi = \omega\Delta t. \quad (205)$$



29. ábra. Síkhullámok interferenciája geometriai optikai közelítésben.

Csíkserg térbeli periódusának meghatározása



30. ábra. Interferogram hullámszám-vektorának ($\Delta \mathbf{k}$) meghatározása.

(200)-ból látszik, hogy a csíkserg hullámszámvektora formailag mintha $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ lenne. Ebből a térbeli csíkperiódus (Λ) könnyen megkapható:

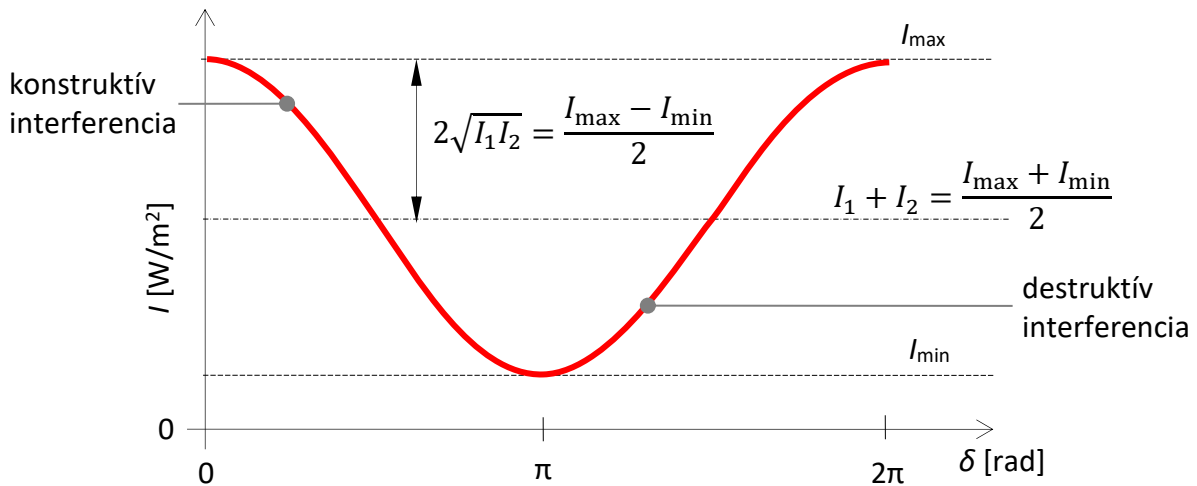
$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Lambda} \Rightarrow \Lambda = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|} = \frac{2\pi}{2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{\lambda_0}{2 \cdot n \sin \theta}. \quad (206)$$

7.3. Az interferenciacsíkok láthatósága

Legyen a két hullám intenzitása külön-külön I_1 és I_2 . Ekkor (202) a következő alakú lesz:

$$I_1 = \frac{v\varepsilon}{2} E_{01}^2; \quad I_2 = \frac{v\varepsilon}{2} E_{02}^2 \Rightarrow I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta(\mathbf{r})). \quad (207)$$

Az $I(\delta)$ függvényt (azaz interferogrammot) az alábbi diagrammon ábrázoltuk.



31. ábra. Interferogram szemléltetése a fáziskülönbség (δ) függvényében.

Az interferenciajelenségek erősségét az ún. *láthatósággal* jellemezzük. A láthatóság definíciója a következő, ami (207) alapján számolható ki:

$$V \triangleq \frac{(I_{\max} - I_{\min})/2}{(I_{\max} + I_{\min})/2} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}. \quad (208)$$

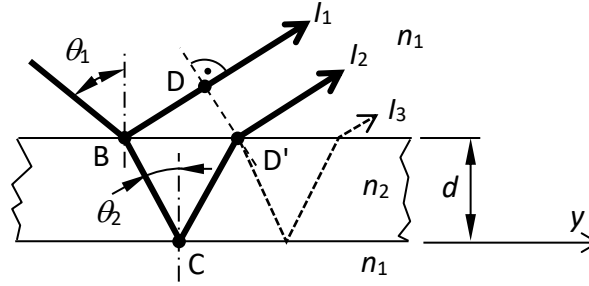
$V_{\max} = 1$, ha $I_1 = I_2$. Ebben az esetben:

$$I(\mathbf{r}) = 2I_1 \cdot (1 + \cos(\delta(\mathbf{r}))). \quad (209)$$

Ez az alak később, a statisztikus optika tárgyalásánál válik majd nagy jelentőségűvé.

7.4. Példa: síkpárhuzamos lemez

A felületre beeső, áthaladó és visszavert síkhullámokat egy-egy fénysugárral reprezentáljuk.



32. ábra. Síkpárhuzamos lemez interferenciájának tárgyalása kéthullámú közelítésben.

Feltétel: a reflektancia kicsi: $R \ll 1$ (pl. levegő-üveg esetén 4% merőleges beesésnél). Ekkor:

$$I_1 = I_I R \quad ; \quad I_2 = I_I (1 - R) \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} R (1 - R) \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = I_I R (1 - R)^2 \approx I_I R$$

$$I_3 = I_I (1 - R) \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} R R (1 - R) \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = I_I R^3 (1 - R)^2 \approx I_I R^3, \quad (210)$$

ahol felhasználtuk az intenzitás és a transzmittancia közötti kapcsolatot ferde beesés esetén leíró (92) összefüggést is. (210) alapján $I_1 \approx I_2$, és $I_3 \ll I_{1,2}$, tehát az interferenciajelenség kéthullámú közelítésben tárgyalható. A felületekről visszavert két síkhullám közötti fáziskülönbség az optikai úthossz alapján számolható:

$$OPD_{BD'-BD} = n_2 \frac{2d}{\cos(\theta_2)} - n_1 \cdot 2d \cdot \sin(\theta_1) \tan(\theta_2) = 2d \cdot n_2 \cos(\theta_2). \quad (211)$$

Mivel $n_2 > n_1$ esetén B pontban (fordított esetben C pontban) az elektromágneses tér reflexió esetén π fázisugrást szenved, a $BD'-BD$ közötti fázistolás:

$$\delta = OPD_{BD'-BD} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} \pm \pi = \frac{4\pi \cdot n_2 d}{\lambda_0} \cos \theta_2 \pm \pi. \quad (212)$$

A fenti egy egyszerűsített tárgyalási módja a felületek által okozott fázistolásnak. Általános esetben egy (203)-szerű egyenletet kellene felírnunk az interferenciára, figyelembe véve a ρ reflexiók tényező esetleges komplex értékét (ld. pl. fémek és teljes belső visszaverődés).

(207) egyenlet alapján konstruktív interferenciát (magnövekedett reflexiót) akkor látunk, ha $\delta = m \cdot 2\pi$, $m = 1, 2, \dots$. Destruktív az interferencia (csökken a reflexió), ha $\delta = m \cdot 2\pi + \pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Merőleges beesésnél, $d \rightarrow 0$ esetén $\delta \rightarrow \pi$, azaz a reflexió zérus, a lemez „eltűnik”.

Haidinger-csíkok: ha $d(y) = \text{const.}$, az interferenciakép θ_2 -irányfüggő.

Newton-gyűrűk: ha $\theta_2 = \text{const.}$, akkor az interferenciakép y -helyfüggő $d(y)$ -en keresztül.

Az interferencia időbeli koherencia-feltétele

Interferencia időben koherens, vagy részlegesen koherens nyalábok szuperpozíciója esetén alakul ki – utóbbi esetben a frekvenciaspektrum nem nulla, hanem véges szélességű (ld. 11-12. fejezetek). Mivel eltérő frekvenciájú nyalábok esetén lebegés lép fel, az egyik nyalábot alkotó ω körfrekvenciájú spektrumkomponensek csak a másik nyaláb azonos körfrekvenciájú komponenseivel képesek statikus interferenciát létrehozni. Az interferáló hullámkomponensek közötti fáziskülönbség a következőképpen függ a körfrekvenciától:

$$\delta(\mathbf{r}, \omega) = \Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r} + \Delta \varphi = \frac{n\omega}{c} \Delta \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r} + \omega \Delta t, \quad (213)$$

ahol $\Delta \hat{\mathbf{s}}$ a hullámok egységnyi irányvektorainak különbsége, Δt a közöttük lévő időkülönbség. Terjedjen a két nyaláb azonos irányba ($\Delta \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$), ekkor $\delta(\omega) = \omega \cdot \Delta t$. Az időkülönbség növekedtével addig látunk interferenciát, amíg a spektrum összes (ω_1 -től ω_2 -ig terjedő) ω -jára teljesül az alábbi feltétel (ld. (205) összefüggés):

$$2\pi \gg \delta(\omega_1) - \delta(\omega_2) = \omega_1 \Delta t - \omega_2 \Delta t = \Delta \omega \Delta t \rightarrow \Delta \nu \Delta t \ll 1. \quad (214)$$

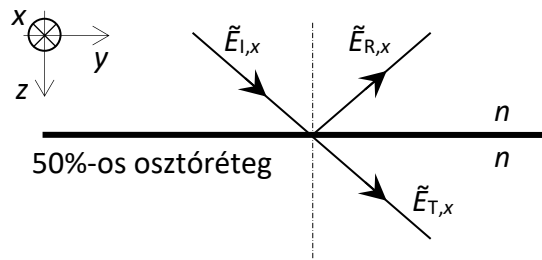
Egyenlőség esetén:

$$\tau_c \triangleq \Delta t \rightarrow \tau_c = \frac{1}{\Delta \nu} \rightarrow \Delta t \ll \tau_c \text{ v. } OPD \ll L_L = c \cdot \tau_c \quad (215)$$

ahol L_L jelöli a *longitudinális koherenciahosszat*. A jelenséget majd a statisztikus optikával foglalkozó 11-12. fejezetekben tárgyaljuk részletesen.

7.5. Hová lesz a fény amplitúdóosztó interferométerekben?

A fény által hordozott teljesítményt interferenciával nem lehet eltüntetni, csak a térbeli vagy időbeli eloszlását megváltoztatni ill. átrendezni! (Energiamegmaradás törvénye.)



33. ábra. 50%-os osztólemezen áthaladó/visszaverődő síkhullám térampitúdói.

Vizsgáljuk meg a legtöbb interferométerben alkalmazott 50%-os intenzitásosztó felület hatását a térerősségvektorra. Az egyszerűség kedvéért csak az $\mathbf{E}$ vektor beesési síkra merőleges (x) komponensét tekintjük, ami „s” polarizációs állapotnak felel meg. Vagyis ha a beeső fény (E_I) x -irányban polarizált, áthaladás (E_T) és visszaverődés (E_R) után a polarizációs állapota nem változik meg. A többi térvektorkomponensre a vizsgálat analóg módon lefolytatható. A vizsgált tér monokromatikus, ezért leírására a komplex formalizmust használjuk, az időfüggő $e^{-i\omega t}$ tényező elhagyásával. A 33. ábrának megfelelően, n törésmutatójú közegben lévő 50%-os osztóréteg esetén a komplex térerősség-amplitúdókra és intenzitásokra igazak az alábbi egyenletek. Mivel a beeső, transzmittált és visszavert térerősségek komplex mennyiségek (hat paraméter), illetve ezek közül a beeső tér két paramétere adott (azaz négy független paraméter van), összesen négy egyenletre lesz szükségünk.

Összintenzitás állandó – energiamegmaradás:

$$|\tilde{E}_{I,x}|^2 = |\tilde{E}_{T,x}|^2 + |\tilde{E}_{R,x}|^2 \quad (216)$$

$\tilde{E}$ -tangenciális komponensére vonatkozó határfeltétel (két egyenlet: valós és képzetes rész):

$$\tilde{E}_{T,x} = \tilde{E}_{I,x} + \tilde{E}_{R,x} \quad (217)$$

50%-os intenzitás osztási arány:

$$|\tilde{E}_{T,x}|^2 = |\tilde{E}_{R,x}|^2 \quad (218)$$

(216) és (217)-ből:

$$|\tilde{E}_{T,x}|^2 + |\tilde{E}_{R,x}|^2 = |\tilde{E}_{T,x} - \tilde{E}_{R,x}|^2 \rightarrow \tilde{E}_{T,x} \tilde{E}_{R,x}^* = -\tilde{E}_{T,x}^* \tilde{E}_{R,x} \rightarrow \tilde{E}_{T,x}^* = -\frac{\tilde{E}_{T,x} \tilde{E}_{R,x}^*}{\tilde{E}_{R,x}} \quad (219)$$

(218) annak felel meg, hogy:

$$\tilde{E}_{T,x} \cdot \tilde{E}_{T,x}^* = \tilde{E}_{R,x} \cdot \tilde{E}_{R,x}^* \quad (220)$$

Ide behelyettesítve (219)-et a következőt kapjuk:

$$\tilde{E}_{T,x} \tilde{E}_{T,x} = -\tilde{E}_{R,x} \tilde{E}_{R,x} \rightarrow \tilde{E}_{R,x} = \pm i \cdot \tilde{E}_{T,x} \quad (221)$$

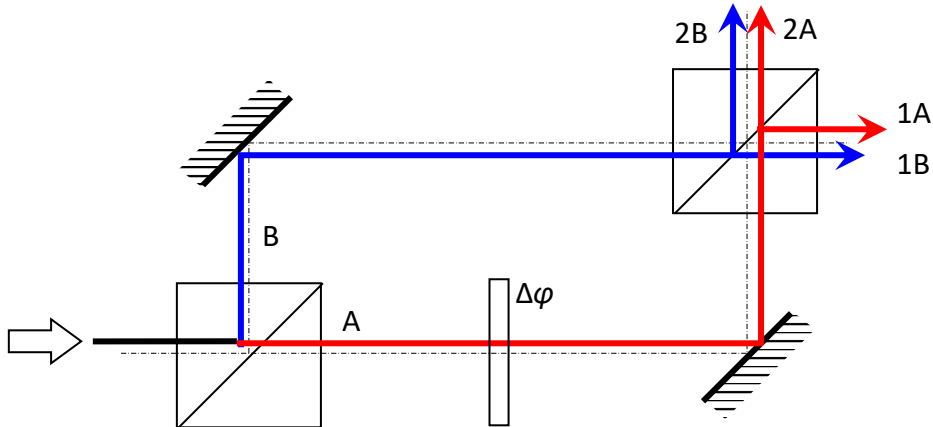
A $\pm$ előjel értékét az osztóréteg fizikai megvalósítása határozza meg; mi a pozitívat választjuk, az intenzitásokra kapott értékekre ez amúgy sem lesz hatással. A fenti összefüggés azt jelenti, hogy bármilyen módon is állítunk elő egy 50%-os osztóréteget (bármilyen megfelelő vékonyréteg struktúrával rendelkező, abszorpciómentes dielektrikumtükör használható), a visszavert és áthaladó térerősségek között éppen $\pi/2$ fáziskülönbség van! A fenti egyenletekből az alábbiak is levezethetőek:

$$\tilde{E}_{R,x} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \cdot 3/4 \pi} \cdot \tilde{E}_{I,x} \text{ illetve } \tilde{E}_{T,x} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \cdot 1/4 \pi} \cdot \tilde{E}_{I,x} \quad (222)$$

Az általános formulák tetszőleges R reflektanciára (218) átalakításával határozhatók meg:

$$|\tilde{E}_{I,x}|^2 = \frac{|\tilde{E}_{T,x}|^2}{1-R} = \frac{|\tilde{E}_{R,x}|^2}{R} \quad (223)$$

Vizsgáljuk most meg az interferenciát egy Mach-Zehnder interferométerben, ahol a fényút „A” ágában egy $\Delta\varphi$ fáziskésleltető lemez (retarder) van.



34. ábra. Mach-Zehnder interferométer sematikus ábrája. A & B jelöli a nyalábokat az első osztóelem után, és 1 & 2 jelöli a nyalábokat a második osztóelem után.

Ha a belépő nyaláb $\tilde{E}_1$, akkor (222) segítségével az $\tilde{E}_1$ és $\tilde{E}_2$ kilépő nyalábok a következőképpen írhatók fel (a prizma osztórétege közötti *OPL*-eket egyenlőnek tekintjük, ezért fel sem írtuk):

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \tilde{E}_{1A} + \tilde{E}_{1B} = \tilde{E}_1 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i/4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i3/4\pi} e^{i\Delta\varphi} + \tilde{E}_1 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i3/4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i/4\pi} \\ \tilde{E}_2 &= \tilde{E}_{2A} + \tilde{E}_{2B} = \tilde{E}_1 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i/4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i3/4\pi} e^{i\Delta\varphi} + \tilde{E}_1 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i3/4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i/4\pi} \end{aligned} \quad (224)$$

Az egyenleteket egyszerűsítve:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1 &= \frac{\tilde{E}_1}{2} e^{i\pi} e^{i\Delta\varphi} + \frac{\tilde{E}_1}{2} e^{i\pi} = -\frac{\tilde{E}_1}{2} (e^{i\Delta\varphi} + 1) \\ \tilde{E}_2 &= \frac{\tilde{E}_1}{2} e^{i\frac{1}{2}\pi} e^{i\Delta\varphi} + \frac{\tilde{E}_1}{2} e^{-i\frac{1}{2}\pi} = i \frac{\tilde{E}_1}{2} (e^{i\Delta\varphi} - 1)\end{aligned}\quad (225)$$

Ebből az intenzitások:

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{v\varepsilon}{2} |\tilde{E}_1|^2 = \frac{v\varepsilon}{2} \frac{|\tilde{E}_1|^2}{4} (1 + 1 + e^{i\Delta\varphi} + e^{-i\Delta\varphi}) = \frac{I_1}{4} (2 + e^{i\Delta\varphi} + e^{-i\Delta\varphi}) \\ I_2 &= \frac{v\varepsilon}{2} |\tilde{E}_2|^2 = \frac{v\varepsilon}{2} \frac{|\tilde{E}_1|^2}{4} (1 + 1 - e^{i\Delta\varphi} - e^{-i\Delta\varphi}) = \frac{I_1}{4} (2 - e^{i\Delta\varphi} - e^{-i\Delta\varphi})\end{aligned}\quad (226)$$

ahol I_1 a megvilágító nyaláb intenzitása. A fenti egyenletekből adódik a végeredmény:

$$I_1 = \frac{I_1}{2} (1 + \cos \Delta\varphi) \quad \text{és} \quad I_2 = \frac{I_1}{2} (1 - \cos \Delta\varphi). \quad (227)$$

Ez azt jelenti, hogy az interferométer után kapott két nyaláb intenzitásváltozása között mindig π fáziskülönbség van, vagyis az 1. és 2. nyalábok *mindig* ellenfázisban vannak. Más szóval, a Mach-Zehnder interferométernél (ill. bármely másiknál) a fény hol az egyik kimenő nyaládba megy, hol a másikba, az úthosszkülönbségnek ($\Delta\varphi$ fáziskülönbségnek) megfelelően. Ha $\Delta\varphi = 0$, akkor az összes fény az 1. nyaládba megy. Ugyanígy a Michelsonnál a fény vagy elhagyja az interferométert, vagy visszaverődik a fényforrás felé.

7.6. Nagyszögű interferencia (kiegészítő anyag)

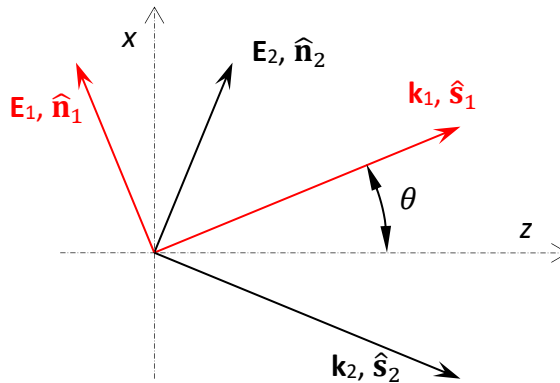
A 2. fejezet (56) egyenlete alapján dielektrikumban terjedő síkhullám esetén a Poynting-vektor időátlaga ($\hat{s}$ jelöli a hullámfrontnormális irányába mutató egységvektort):

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*\} = \frac{1}{2\mu\omega} \text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}^*)\} = \frac{v\varepsilon}{2} \tilde{\mathbf{E}} \times (\hat{s} \times \tilde{\mathbf{E}}^*). \quad (228)$$

A valósrészképzést elhagyjuk, mivel dielektrikumokban $\mathbf{E}$ és $\mathbf{H}$ mindig fázisban vannak, valamint nem jelöltük a térerővektorok helyfüggését sem. A következő két tetszőleges szöget bezáró harmonikus síkhullám interferenciáját vizsgáljuk:

$$\tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1 e^{i\Phi_1(\mathbf{r})} \quad \text{és} \quad \tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2 e^{i\Phi_2(\mathbf{r})}. \quad (229)$$

Az elektromos térerősségek legyenek az x - z síkban (p-polarizáció). Ugyanez a vizsgálat az s-polarizációra a továbbiakban leírtakkal analóg módon lefolytatható.



35. ábra. Nagyszögű interferencia szemléltetése.

(228)-ba beírva a két síkhullám térerősségeinek az összegét (azaz $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ és $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ -t):

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v\varepsilon}{2} (\tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_2) \times (\hat{\mathbf{s}}_1 \times \tilde{\mathbf{E}}_1^* + \hat{\mathbf{s}}_2 \times \tilde{\mathbf{E}}_2^*). \quad (230)$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v\varepsilon}{2} (\tilde{\mathbf{E}}_1 \times (\hat{\mathbf{s}}_1 \times \tilde{\mathbf{E}}_1^*) + \tilde{\mathbf{E}}_2 \times (\hat{\mathbf{s}}_2 \times \tilde{\mathbf{E}}_2^*) + \tilde{\mathbf{E}}_1 \times (\hat{\mathbf{s}}_2 \times \tilde{\mathbf{E}}_2^*) + \tilde{\mathbf{E}}_2 \times (\hat{\mathbf{s}}_1 \times \tilde{\mathbf{E}}_1^*)) \quad (231)$$

A vektoriális szorzatokat $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \equiv (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ alapján felbontva:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v\varepsilon}{2} ((\tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_1^*)\hat{\mathbf{s}}_1 + (\tilde{\mathbf{E}}_2 \tilde{\mathbf{E}}_2^*)\hat{\mathbf{s}}_2 + (\tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_2^*)\hat{\mathbf{s}}_2 + (\tilde{\mathbf{E}}_2 \tilde{\mathbf{E}}_1^*)\hat{\mathbf{s}}_1 - (\tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_2^*)\hat{\mathbf{s}}_2 - (\tilde{\mathbf{E}}_2 \tilde{\mathbf{E}}_1^*)\hat{\mathbf{s}}_1). \quad (232)$$

Az egyforma komponensek szorzatainál az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ -nek megfelelő tag zérus, mivel $\mathbf{k}$ merőleges $\mathbf{E}$ -re. A keresztagoknál ugyanez nem mondható el, ezért benne maradtak az összefüggésben. Paraxiális közelítésben ezt a két utolsó tagot hanyagoljuk el, valamint felhasználva, hogy $\hat{\mathbf{s}}_1$ közel párhuzamos $\hat{\mathbf{s}}_2$ -vel, a tagokat skalárisan összegezzük. Az intenzitás ekkor

$$I(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v\varepsilon}{2} (\tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_1^* + \tilde{\mathbf{E}}_2 \tilde{\mathbf{E}}_2^* + \tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_2^* + \tilde{\mathbf{E}}_2 \tilde{\mathbf{E}}_1^*), \quad (233)$$

ami valóban ekvivalens (197)-el, illetve (202)-el. Amennyiben $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| = E$, de a két hullám nem egyirányú, hanem tetszőleges 2θ szöget zár be, (232)-ből a következő lesz:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v\varepsilon}{2} (2E^2 \cos(\theta) \hat{\mathbf{s}} + 2E^2 \cos(\delta) \cos(2\theta) \cos(\theta) \hat{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_2^* \sin(2\theta) \hat{\mathbf{n}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_2 \tilde{\mathbf{E}}_1^* \sin(2\theta) \hat{\mathbf{n}}_1). \quad (234)$$

Itt $\hat{\mathbf{s}}$ a két hullámszámvektor szögfelezőjének irányába, $\hat{\mathbf{n}}_1$ és $\hat{\mathbf{n}}_2$ pedig a térerősségvektorok irányába mutató egységvektor. Ez utóbbiak különbsége éppen $\hat{\mathbf{s}}$ irányába mutat, így:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = \frac{v\varepsilon}{2} (2E^2 \cos(\theta) \hat{\mathbf{s}} + 2E^2 \cos(\delta) \cos(2\theta) \cos(\theta) \hat{\mathbf{s}} + 2E^2 \cos(\delta) \sin(2\theta) \sin(\theta) \hat{\mathbf{s}}) \quad (235)$$

A fenti egyenletekben a fáziskülönbséget a szokásos módon jelöltük: $\delta \triangleq \Phi_1 - \Phi_2$. Átalakítva:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = v\varepsilon E^2 (\cos(\theta) \hat{\mathbf{s}} + \cos(\delta) \cos(2\theta) \cos(\theta) \hat{\mathbf{s}} + \cos(\delta) \sin(2\theta) \sin(\theta) \hat{\mathbf{s}}), \quad (236)$$

ami trigonometrikus azonosságok felhasználásával roppantul leegyszerűsödik:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, T) \rangle = v\varepsilon E^2 (1 + \cos(\delta)) \cos(\theta) \hat{\mathbf{s}} \quad (237)$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a teljesítmény a szögfelező irányába terjed, $\langle \mathbf{S} \rangle$ abszolútértéke pedig a keresett intenzitás:

$$I(\mathbf{r}) = v\varepsilon E^2 (1 + \cos(\delta(\mathbf{r}))) \cos(\theta). \quad (238)$$

A fenti képlet értelmezése igen egyszerű: minél nagyobb a nyalábok által bezárt 2θ szög, a szögfelező irányába egyre kevesebb teljesítmény terjed, emiatt az intenzitás koszinuszosan csökken. Mivel a levezetés s- és p-polarizációra ugyanazt adja, az (238) összefüggés két tetszőlegesen, de azonos irányban polarizált hullámra igaz. Amikor a két hullám terjedési iránya $2\theta = 180^\circ$ -ot zár be egymással, azaz egymással szembe haladnak és tökéletes állóhullám jön létre: a térerősség továbbra is harmonikusan rezeg, vannak csomópontok és duzzadási helyek, de energia nem terjed semmilyen irányba.

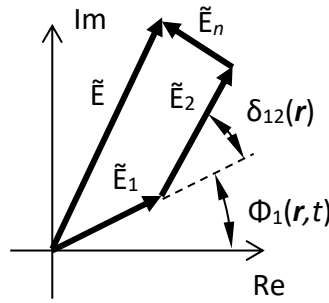
8. TÖBBHULLÁMÚ INTERFERENCIA

8.1. „N” db síkhullám interferenciája (többhullám interferencia)

Amennyiben nem két, hanem több, azonos ω körfrekvenciájú síkhullám interferenciáját vizsgáljuk (továbbra is paraxiális, skalár közelítésben), a (193) eredő térből a következő lesz:

$$\tilde{E}(\mathbf{r}; t) = \sum_{n=1}^N \tilde{E}_n(\mathbf{r}; t) = \sum_{n=1}^N E_{0n} e^{i\Phi_n(\mathbf{r}; t)} \quad (239)$$

Mivel a kéthullám interferenciánál már láttuk az időátlagolás hatását, a továbbiakban a sokkal egyszerűbb komplex formalizmust használjuk.



36. ábra. Fázorösszegezés többhullámú interferencia esetén.

Feltevések: $\delta_{n+1,n} = \Phi_{n+1} - \Phi_n = \delta = \text{const.}$ és $E_{0n} = E_{01} = \text{const.}$ Ekkor (239) így írható:

$$\Phi_n = \Phi_1 + (n-1)\delta \rightarrow \tilde{E} = E_{01} e^{i\Phi_1} \cdot \sum_{n=1}^N e^{i\delta(n-1)} \quad (240)$$

Ez a szummázás egy mértani sor, melynek összegképlete:

$$S_N = a_1 \frac{q^N - 1}{q - 1} ; a_1 = E_{01} e^{i\Phi_1} ; q = e^{i\delta} \quad (241)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E_{01} e^{i\Phi_1} \cdot \frac{e^{i\delta N} - 1}{e^{i\delta} - 1} = E_{01} e^{i\Phi_1} \cdot \frac{e^{i\delta N/2}}{e^{i\delta/2}} \cdot \frac{e^{i\delta N/2} - e^{-i\delta N/2}}{e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}} = \\ &= E_{01} e^{i\Phi_1} \cdot e^{\frac{i\delta(N-1)}{2}} \cdot \frac{\sin(\delta N/2)}{\sin(\delta/2)} \end{aligned} \quad (242)$$

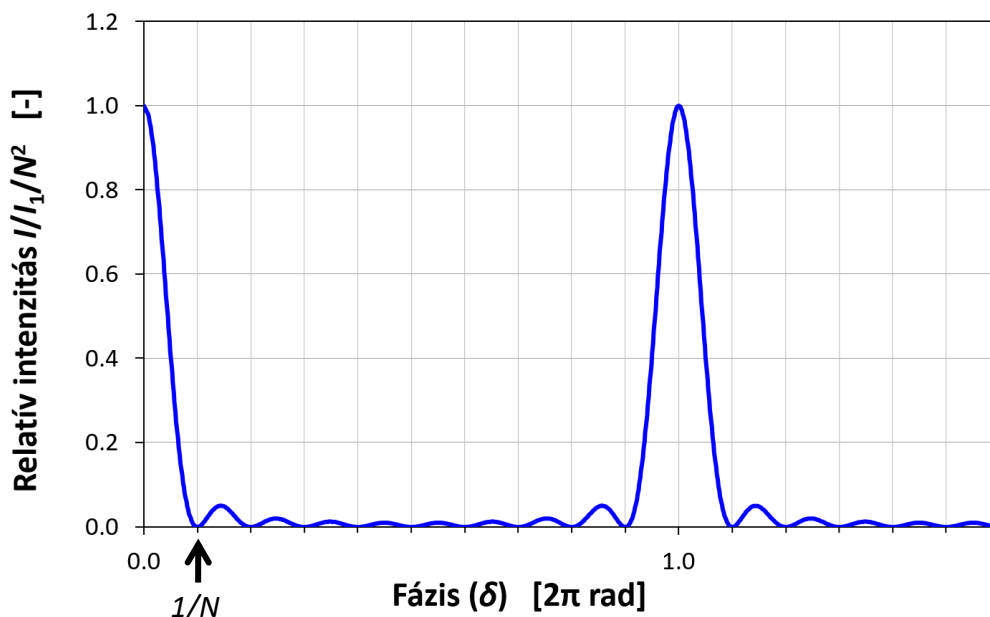
Az intenzitás értéke:

$$I = \langle S \rangle = \frac{v\varepsilon}{2} |\tilde{E}|^2 = v\varepsilon \frac{E_{01}^2}{2} \left(\frac{\sin(\delta N/2)}{\sin(\delta/2)} \right)^2, \quad (243)$$

azaz:

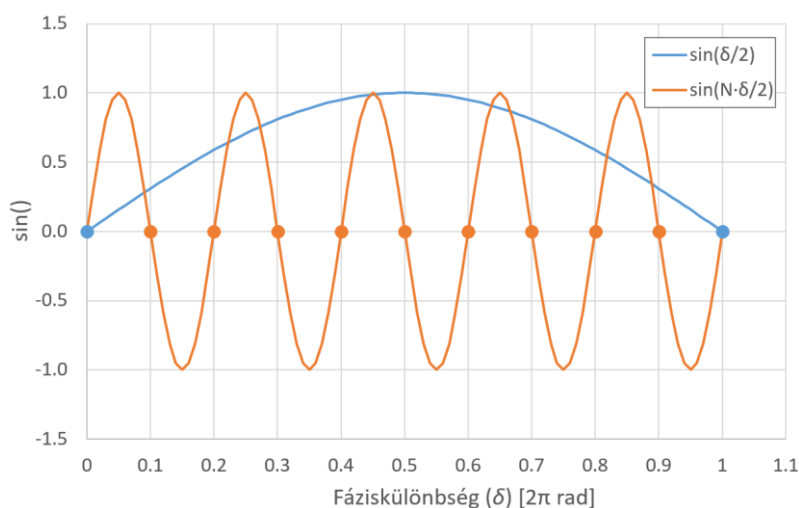
$$I(\delta) = I_1 \left(\frac{\sin(\delta N/2)}{\sin(\delta/2)} \right)^2. \quad (244)$$

A kapott interferogram $N := 10$ hullám esetére a 37. ábrán látható. Konstruktív interferenciát kapunk ha: $\delta = m \cdot 2\pi$, ahol $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – itt vannak a nagy csúcsok, melyek értéke $I_1 N^2$. A lokális minimumok távolsága $\Delta\delta = 2\pi/N$, összesen $N-1$ van belőlük két csúcs között.



37. ábra. Interferogram $N = 10$ db hullámkomponens esetén a fáziskülönbség függvényében.

Az interferogram alakját segít értelmezni a 38. ábra, amely (242) számlálóját és nevezőjét mutatja, $N := 10$ esetre. Jól látható, hogy a hányados zérushelyeket ad ott, ahol $\delta/2 = \pi/N$, illetve ennek egészszámu többszöröse, valamint hogy mind a számláló és a nevező zérus, ha $\delta/2 = \pi \cdot m$. Ez utóbbi esetben a hányados határértékben N -t ad – ilyen helyeken lesznek a csúcsok. Amennyiben N nagy, a számláló fázisa sokkal gyorsabban változik mint a nevezőé, emiatt $\delta = 2\pi m$ kis környezetében a nevező lineárisan közelíthető: $\sin(\delta/2) = \sin(\pi m + x/2) \approx \pm x/2$, a számláló pedig $\sin(\delta N/2) = \sin(\pi m N + Nx/2) = \pm \sin(Nx/2)$, vagyis a hányados úgy viselkedik mint egy $\pm \sin(Nx/2)/(x/2)$ függvény.



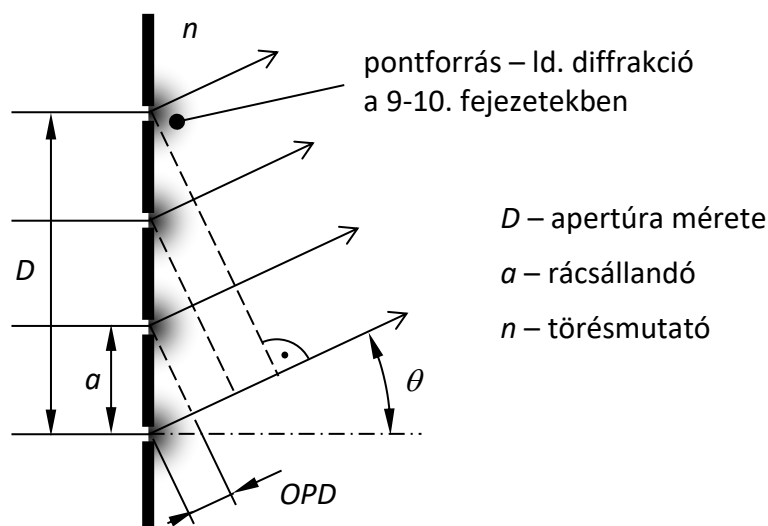
38. ábra. Grafikus szemléltetés a (242) és (243) összefüggések értelmezéséhez.

Példák többhullámú interferenciára

- diffrakciós rács
- síkpárhuzamos lemez (ha $R \approx 1$)
- Fabry-Perot interferométer (v. etalon)
- vékonyréteg struktúrák (mátrixos leírásmód)
- időben periodikusan ismétlődő impulzusok (ld. móduscsatolt lézerek)

8.2. Diffrakciós rács

Egy egyszerű diffrakciós rács felépítése a 39. ábrán látható. A struktúra egy dimenziós, azaz az ábra síkjára merőleges irányban változatlan alakú. A rács N darab rést tartalmaz egy átlátszatlan ernyőn, amelyek mérete összemérhető a hullámhosszal (λ_0), így a fénydiffrakció miatt belőlük gyakorlatilag hengeres hullámfrontok terjednek tovább – ezek interferenciáját vizsgáljuk a távolságban.



39. ábra. Diffrakciós rács modellezése többhullámú interferencia segítségével.

A feladat két szomszédos pontforrásból a végtelbe tartó hullámok fáziskülönbségének (δ) meghatározása. Amennyiben ez ismert, a fent tárgyalt többhullám interferencia mindkét feltétele fennáll, vagyis az interferogram (244) alapján kiértékelhető. Egy adott θ irányban, a rácsból nagy távolságban a hengeres hullámfrontok lokálisan síkhullámnak tekinthetők. E hullámfrontokat visszavetítve a rácsra (ld. szaggatott vonalak az ábrán) a fáziskülönbség az egyik rés és a szomszédos résnek megfelelő hullámfront közötti úthosszkülönbségből meghatározható:

$$\begin{aligned} OPD &= n \cdot a \cdot \sin(\theta) \\ \delta &= \frac{2\pi}{\lambda_0} OPD = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \cdot a \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \quad (245)$$

(244) alapján konstruktív interferencia a következő diszkrét irányokban lép föl:

$$\delta = m \cdot 2\pi \Rightarrow \sin(\theta_m) = m \frac{\lambda_0}{n \cdot a} = m \frac{\lambda}{a} \Leftrightarrow n \cdot \sin(\theta_m) = m \frac{\lambda_0}{a}, \quad (246)$$

ahol m egész szám jelöli az ún. *diffrakciós rendek* sorszámát. Vegyük észre, hogy ha a törésmutatóval átszorozunk, (246)-ban is megjelenik az optikai iránykoszinusz, azaz $n \cdot \sin(\theta)$.

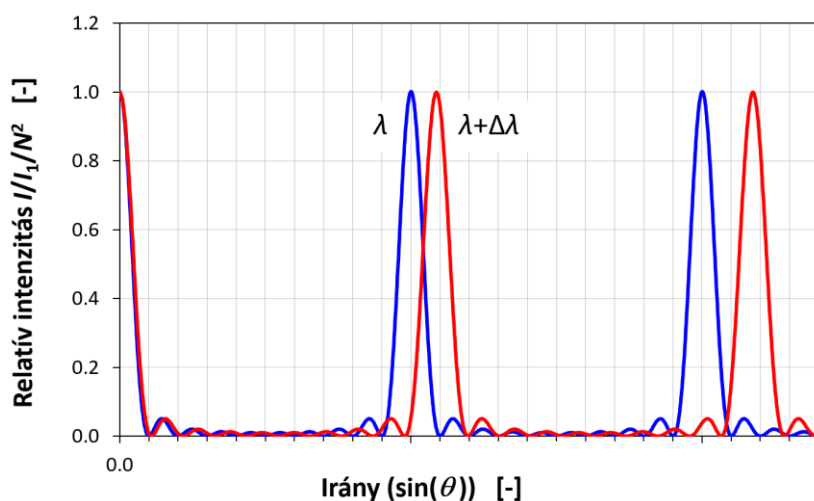
A valóságban a diffrakciós rács réseiből kiinduló hullámok intenzitása nem egyforma minden θ irányban, hanem a résekre konkrét alakjától, méretétől (általában a transzmissziójuk térbeli eloszlásától) függő mértékben nullához tart amint $\theta \rightarrow 90^\circ$. Ezért a diffrakciós rendek intenzitása is fokozatosan csökken, ahogyan m növekszik. Emellett a diffrakciós rendek száma is véges: mivel $\sin(\theta)$ max. értéke 1, az m legnagyobb értéke

$$m_{\max} = \text{floor} \left(\frac{a}{\lambda} \right), \quad (247)$$

ahol az $y = \text{floor}(x)$ függvény az x -hez legközelebbi egészt adja, míg $y \leq x$; $x \in \mathbb{R}$.

Ennél magasabb sorszámú rendekre a totálreflexióhoz hasonlóan elhaló hullámot kapunk, azaz a fény kissé behatol, de nem terjed a rács utáni közegben – minden energia a rácsról visszaverődik. Ha $m_{\max} = 1$, akkor $a = \lambda$, vagyis a hullámhossznál kisebb rácsállandójú diffrakciós rács tükörként visszaveri a rá eső sugárzást (ld. rádiólokátor antenna, mikrohullámú sütő ajtó stb.).

Amennyiben az interferenciaképet nem δ , hanem az irány $\sin(\theta)$ függvényében vizsgáljuk, (246) alapján $m \neq 0$ esetén hullámhosszfüggést fogunk tapasztalni, azaz a konstruktív interferencia minden hullámhosszon eltérő irányban lesz megfigyelhető: minél nagyobb a hullámhossz, annál nagyobb a rendek iránya közötti távolság. Ezt használják ki a spektrométerekben, pl. lézerek diszkrét hullámhosszainak, vagy anyagok abszorpció/s emissziós spektrumainak megmérésére.



40. ábra. Diffrakciós rács interferogramma $N := 10$ db rés esetén az irány függvényében. A pirossal ábrázolt függvéynél a hullámhosszat $\Delta\lambda$ -val megnöveltük a kékhez képest úgy, hogy éppen teljesüljön a Rayleigh-kritérium (ld. alább).

Felbontóképesség:

$$\mathcal{R} \triangleq \lambda / \Delta\lambda \quad (248)$$

Azért így definiálták, mert ez a mennyiség egy adott rács esetén hullámhosszfüggetlen állandó (ld. (244) és alább).

Rayleigh-felbontáskritérium: Az $I(\lambda)$ zérushelye $I(\lambda + \Delta\lambda)$ maximumához esik, ld. 40. ábra.

Ez matematikailag azt jelenti, hogy:

$$\sin(\theta_m(\lambda)) + \Delta \sin(\theta_m(\lambda)) = \sin(\theta_m(\lambda + \Delta\lambda)), \quad (249)$$

ahol $\Delta \sin(\theta_m(\lambda))$ az első zérushelyre mutató irány. A feltételből meghatározható $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \delta = m \cdot 2\pi &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin(\theta_m(\lambda)) \Rightarrow \sin(\theta_m(\lambda)) = \frac{m \cdot \lambda}{a} \\ \Delta\delta = \frac{2\pi}{N} &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \Delta \sin(\theta_m(\lambda)) \Rightarrow \Delta \sin(\theta_m(\lambda)) = \frac{\lambda}{a \cdot N} \\ \delta(\lambda + \Delta\lambda) &= m \cdot 2\pi \Rightarrow \sin(\theta_m(\lambda + \Delta\lambda)) = \frac{m \cdot (\lambda + \Delta\lambda)}{a} \end{aligned} \quad (250)$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \mathcal{R} = m \cdot N = m \cdot \frac{D}{a} . \quad (251)$$

Azaz minél nagyobb a rács D apertúrája a rácsállandóhoz képest (más szóval minél több rés van az apertúrán belül), annál nagyobb a felbontás, tehát annál közelebbi spektrumvonalak is felbonthatók a ráccsal. A felbontóképesség m -el is nő.

Az interferencia műszaki alkalmazásának területei

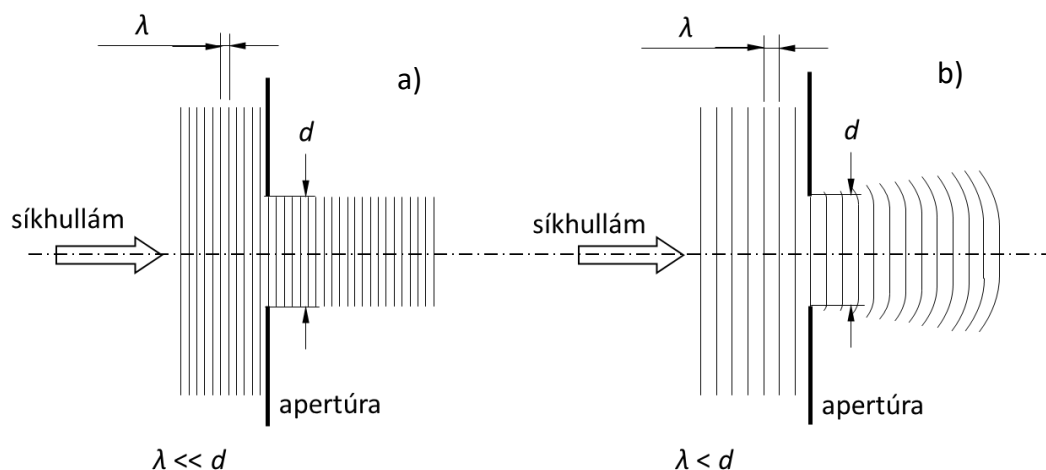
- spektroszkópia
- mérés technika
- holográfia
- interferenciaszűrők
- lézerek

9. SKALÁR DIFFRAKCIÓ

Források: [1], [6], [3], [9]

9.1. Alapfogalmak, diffrakciós modellek, Green-tétel

Diffrakció: (magyarul fényelhajlás) az a jelenség, amikor a fény terjedési iránya a geometriailag meghatározható iránytól jelentősen eltér (Sommerfeld). A fényelhajlás általában akkor eredményez észrevehető változást a fényeloszlásban, ha a sugárzás útjába a hullámhosszával összemérhető nagyságú akadály esik, vagy általánosságban a közeg tulajdonságai (n , κ) a hullámhosszal összemérhető távolságon belül változnak meg.



41. ábra. Geometriai (a) és diffrakciós (b) fényterjedés szemléltetése.

Feladat: Ha adott felületen ismert a komplex térerőeloszlás, hogyan határozható meg a térerősség egy, a felületen kívül eső pontban?

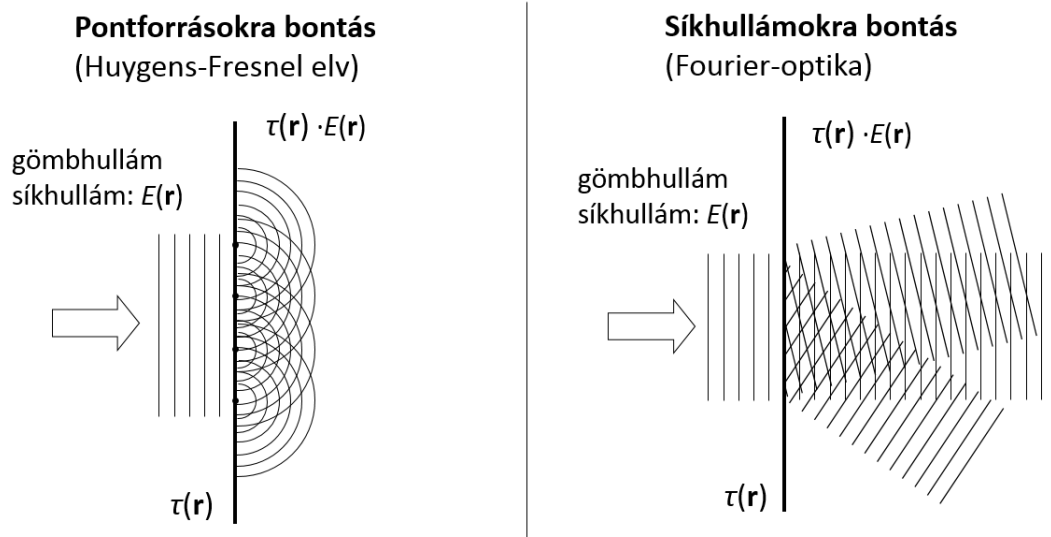
Feltételek:

1. a kiindulási térerőeloszlás sík felületen adott
2. a felület különböző pontjai között időben állandó a fáziskülönbség (térbeli koherencia)
3. a megvilágító nyaláb ω körfrekvenciájú monokromatikus hullám (időbeli koherencia)
4. skalár közelítés: csak egy térerősség vektorkomponenst veszünk figyelembe, melynek iránya a fényterjedés során nem változik meg jelentősen (ha a fő terjedési iránnyal bezárt szög θ , akkor a standard ökölszabály szerint $\sin \theta < 0,6$ és $\cos \theta > 0,8$); a különböző irányú komponenseket egymástól függetlennek tekintjük
5. a terjedési térben a közegek jellemzőinek változása hullámhossznyi tartományon elhanyagolható (törésmutató, abszorpció) $\rightarrow$ hullámegyenlet használható

Diffrakciós modellek

A diffrakció során kialakuló térerőeloszlás felfogható végtelen számú, folytonos eloszlású elemi hullámkomponens fázishelyes szuperpozíciójaként. Ehhez olyan elemi hullámokat célszerű választani, amelyek terjedése analitikusan leírható, és kielégítik a hullámegyenletet. Két alapvető tárgyalásmód létezik, amelyek ekvivalens eredményekre vezetnek:

- pontforrásokra bontás (Huygens-Fresnel elv)
- síkhullámokra bontás (Fourier-optika)



42. ábra. A két legismertebb diffrakciós modell szemléltetése.
 $\tau(\mathbf{r})$ a felületen értelmezett komplex transzmissziófüggvény.

Mi a továbbiakban a pontforrásokra bontással foglalkozunk.

Hullámegyenlet

Az E skalár térerősség komplex mennyiség, és próbafüggvényünkben a *pozitív fázisterjedés* módszerét alkalmazzuk (azaz a fázistagot mindenhol megszorozzuk -1 -el):

$$E(\mathbf{r}, t) := E(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (252)$$

Vizsgálatainkhoz az időfüggetlen hullámegyenlet ((28) Helmholtz-egyenlet) skalár formájából indulunk ki, ennek a megoldását keressük adott peremfeltételek esetén:

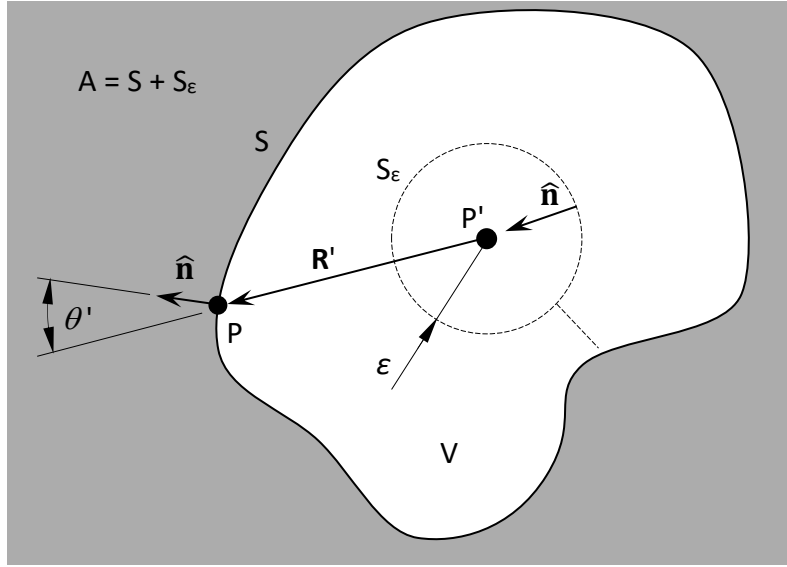
$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = 0. \quad (253)$$

Green-tétel

A levezetés alapja és kiindulási pontja az analízisből ismert *Green-tétel*: ha adott két tetszőleges komplex függvény G és E , amelyek folytonosak, és az első és második parciális deriváltjaik is folytonosak egy „ A ” zárt felületen és azon belül, akkor igaz a következő összefüggés:

$$\iiint_V (G \cdot \nabla^2 E - E \cdot \nabla^2 G) dV = \iint_A (G \cdot \hat{\mathbf{n}} \nabla E - E \cdot \hat{\mathbf{n}} \nabla G) dA, \quad (254)$$

ahol „ V ” az „ A ” által bezárt térfogat. A felületi integrál végigtapogatja az „ A ” felület pontjait, melyeket „ P ”-vel jelölünk. Ezen pontokban a felületnormális $\hat{\mathbf{n}}$, melynek irányítottsága a tétel értelmében mindig *kifelé* mutat a vizsgált „ V ” térfogattól.



43. ábra. A Green-tétel megfogalmazásánál használt jelölések bemutatása.

9.2. Helmholtz és Kirchhoff integráltétele

Amennyiben $E(P)$ az „A” felületen adott és mi egy ezen belüli P' pontban keressük $E(P')$ értékét, akkor a (254) képletet tovább kell alakítani. Az alábbi levezetés a diffrakciós integrál alapja, amelynek bemutatásakor Kirchhoff módszerét követjük. (Korábban Helmholtz hanghullámokra végezte el a számolást). Kirchhoff a G ún. Green-függvényt a következőképpen választotta meg:

$$G(P) := \frac{1}{R'} e^{ikR'}, \quad (255)$$

ami nem más, mint egy a P' pontból *kiinduló* gömbhullám, egységnyi amplitudóval (a terjedési irány az exponens előjeléből látszik). Erre természetesen érvényes a Helmholtz-egyenlet:

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0 \quad (256)$$

Az E -re vonatkozó (253) egyenletet és (256)-öt behelyettesítve (254) bal oldalába:

$$\iiint_V (G \cdot \nabla^2 E - E \cdot \nabla^2 G) dV = - \iiint_V (GE \cdot k^2 - EG \cdot k^2) dV = 0. \quad (257)$$

Vagyis a Green-tételből ennyi marad a homogén (forrásmentes) hullámeqyenletet kielégítő komplex E és G függvények esetén:

$$\iint_A (G \cdot \hat{n} \nabla E - E \cdot \hat{n} \nabla G) dA = 0. \quad (258)$$

A P' pontban G -nek szingularitása van, emiatt ezt ki kell zárni a vizsgálatból. Ennek érdekében az „A” felületet célszerű két részből összeállítani:

$$A = S + S_\epsilon, \quad (259)$$

ahol „S” a térfogatot kívülről bezáró felület, S_ϵ pedig a P' pont köré húzott ϵ sugarú gömb. (258) ezekkel a következő módon írható át:

$$- \iint_{S_\epsilon} (G \cdot \hat{n} \nabla E - E \cdot \hat{n} \nabla G) dA = \iint_S (G \cdot \hat{n} \nabla E - E \cdot \hat{n} \nabla G) dA. \quad (260)$$

G függvény $\hat{n}$ irányú deriváltja a törtderiválás és a láncszabály alkalmazásával:

$$\begin{aligned}\hat{n}\nabla G &= \hat{n} \cdot \text{grad} \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \right) = \hat{n} \cdot \frac{\partial}{\partial R'} \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \right) \cdot \text{grad} R' = \\ &= \cos \theta' \left(ik \frac{e^{ikR'}}{R'} - \frac{e^{ikR'}}{R'^2} \right) = \cos \theta' \cdot \left(ik - \frac{1}{R'} \right) \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'}.\end{aligned}\quad (261)$$

Az S_ε felületen a következő állítások igazak:

$$\cos(\theta') = -1 ; \quad G(P) = \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} ; \quad \hat{n}\nabla G = \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \cdot \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}.\quad (262)$$

Ezeket figyelembevéve és ha $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor (260) bal oldalából a következő lesz:

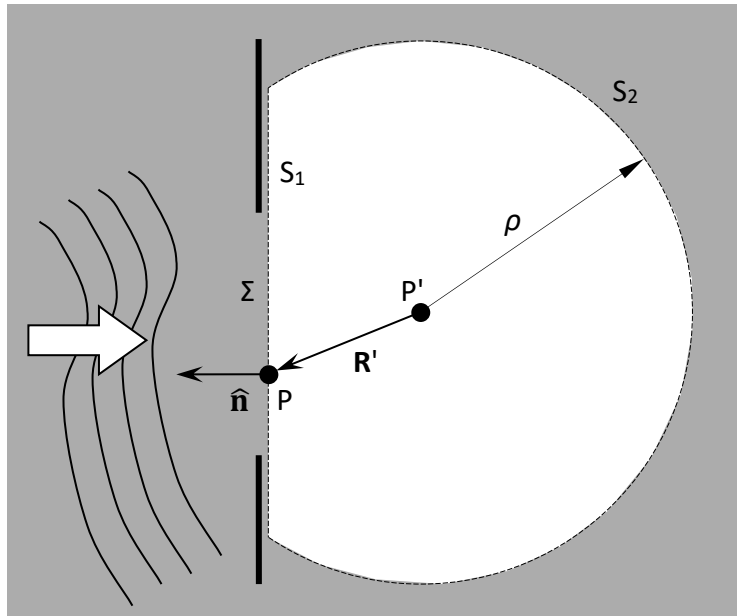
$$-\iint_{S_\varepsilon} (G \cdot \hat{n}\nabla E - E \cdot \hat{n}\nabla G) dA = -4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \cdot \hat{n}\nabla E - E \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \cdot \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \rightarrow 4\pi E(P') \quad (263)$$

A felületi integrálást azért végezhetjük el ilyen egyszerűen, mert E és ennek deriváltja folytonosak a vizsgált térfogatban, így P' -nél is, és mivel ε tart nullához, E értéke az S_ε felület mentén konstansnak tekinthető. (263)-t behelyettesítve (260)-be megkapjuk Helmholtz és Kirchhoff integráltételét, ami nem más mint a keresett összefüggés $E(P')$ -re, ahol $E(P)$ az „ S ” felületen adott:

$$E(P') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \cdot \hat{n}\nabla E - E \cdot \hat{n}\nabla \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \right) \right) dA.\quad (264)$$

9.3. Fresnel-Kirchhoff-diffrakciós integrál

(264) összefüggést az optikában általában a 44. ábrán látható elrendezésre célszerű meghatározni, amelyben a Σ -val jelölt nyílás (apertúra) sík felületén tekintjük ismertnek az $E(P)$ térerősséget, amit a balról érkező megvilágítás okoz.



44. ábra. A Fresnel-Kirchhoff-diffrakciós integrál felírásánál használt jelölések bemutatása.

Az integrálást az „S” zárt felületen végezzük, amely most két részből áll:

$$S = S_1 + S_2. \quad (265)$$

Megmutatható, hogy ha $\rho \rightarrow \infty$, és $E(P)$ legalább olyan gyorsan tűnik el S_2 -n mint egy gömbhullám (*Sommerfeld-féle sugárzási feltétel*), akkor az integrál S_2 -n nullához tart:

$$\iint_{S_2} \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \cdot \hat{n} \nabla E - E \cdot \hat{n} \nabla \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \right) \right) dA \rightarrow 0, \quad (266)$$

vagyis (264)-ből ez marad:

$$E(P') = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \cdot \hat{n} \nabla E - E \cdot \hat{n} \nabla \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \right) \right) dA. \quad (267)$$

Annak érdekében, hogy az integrálást ne kelljen az S_1 végtelen sík felületre elvégezni, Kirchhoff a következő határfeltételeket szabta meg:

1. Σ apertúrában belül: $E(P) = \text{változatlan}$
2. Σ apertúrában kívül: $E(P) = 0$ és $|\text{grad}(E)| = 0$

E feltételeknek köszönhetően az integrálást már csak a Σ apertúrára kell kiszámolni:

$$E(P') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \cdot \hat{n} \nabla E - E \cdot \hat{n} \nabla \left(\frac{e^{ikR'}}{R'} \right) \right) dA. \quad (268)$$

Egyszerűségük és előnyösségük ellenére mindkettő feltétel alapvető problémákat vet föl. Az hogy a térerősség ugyanakkora Σ -n belül apertúra nélkül mint apertúrával, fizikai képtelenség, ahogy az is, hogy $E(P)$ az apertúrában kívül zérus. Bármiféle abszorbens közeget helyezünk ugyanis egy sugárzó térbe, az mindenképpen módosítja a térerősség eloszlását. A hatás viszont általában elhanyagolható: ha $\Sigma > \lambda$. Ami a másik problémát illeti, matematikailag igazolható, hogy ha egy folytonos függvény értéke és a deriváltja is egy véges intervallumon zérus, akkor a függvény mindenhol konstans nulla. Az említett következtetések feloldását az MSc-s Fizikai optika tárgyban fogjuk megkapni, ahol a Green-függvényt nem (255) segítségével definiáljuk, hanem komplexebb módon. Az eredmény a Rayleigh-Sommerfeld diffrakciós integrál lesz, ami nem szignifikánsan pontosabb mint a (268)-ból származtatott, lentebb bemutatásra kerülő diffrakciós integrál, csupán matematikailag korrekt a levezetése.

A (268)-ben szereplő Green-függvénygradienst (261) alapján határozzuk meg, az alábbi egyszerűsítő feltételezéssel élve:

$$\frac{1}{R'} \ll k \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi} \ll R'. \quad (269)$$

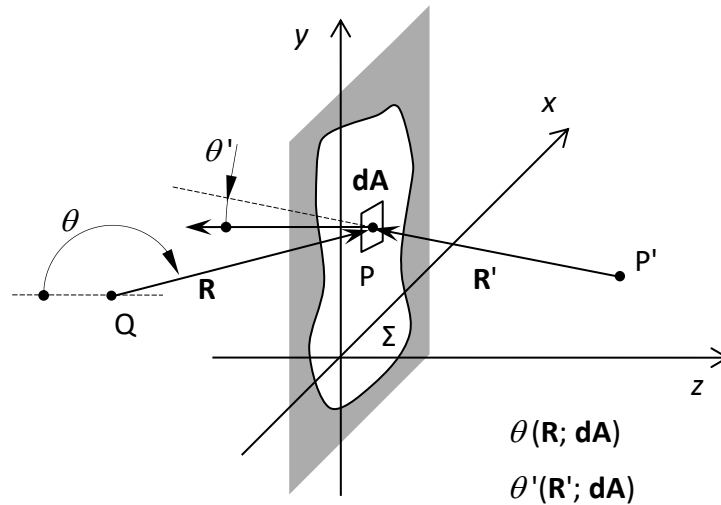
Mivel k értéke igen nagy, és a skalár közelítés miatt már korábban feltettük, hogy $\sin \theta' < 0,6$, azaz Σ mérete $< R'$, a (269) feltevés mindenképpen teljesül. Ezzel

$$\hat{n} \nabla G = \cos \theta' \cdot \left(ik - \frac{1}{R'} \right) \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'} \approx ik \cdot \cos \theta' \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'}, \quad (270)$$

vagyis a felületi integrálból a következő marad:

$$E(P') = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikR'}}{R'} (\hat{n} \nabla E - E \cdot ik \cdot \cos(\theta')) dA \quad (271)$$

Ne felejtjük el, hogy θ' előjeles mennyiség. Az utolsó lépés, hogy megadjuk a Σ apertúrát megvilágító sugárzást, azaz $E(P)$ -t. Az egyszerűség kedvéért legyen ez egy pontforrás (Q), ami az apertúrától balra helyezkedik el.



45. ábra. A Σ apertúrát megvilágító Q pontforrás paramétereinek értelmezése.

A Q pontforrás és az apertúra P pontjai közötti távolság R , a sugárzás amplitúdója E_0 :

$$E(P) := \frac{E_0}{R} e^{ikR}. \quad (272)$$

A (269) feltételezéssel itt is élhetünk (mivel Σ mérete $< R$ a skalár közelítés miatt), vagyis:

$$\frac{1}{R} \ll k \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi} \ll R, \quad (273)$$

amivel az E gradiense:

$$\hat{n} \nabla E = \cos(\theta) \cdot \left(ik - \frac{1}{R} \right) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} E_0 \approx ik \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{e^{ikR}}{R} E_0, \quad (274)$$

Ezt behelyettesítve (271)-ba megkapjuk a *Fresnel-Kirchhoff diffrakciós integrált*:

$$E(P') = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} E_0 \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'} \cdot \frac{\cos \theta - \cos \theta'}{2} dA. \quad (275)$$

A kifejezés értelmezéséhez először azt kell észrevenni, hogy matematikailag nem különböztethető meg egy olyan pontforrás fázisa, ami a P' pontban van és a P felé terjed attól, ami P -ben van és P' felé terjed. Vagyis (275)-et felfoghatjuk úgy, hogy az elektromos tér a P' pontban felírható a Σ apertúrából induló elemi gömbhullámok összegeként, hasonlóan a Huygens-Fresnel elv megállapításához. Annyi a lényegi eltérés, hogy itt az elemi gömbhullámokat koszinuszos iránykarakterisztikával kell figyelembe venni, valamint szerepel egy i/λ konstans szorzó. Érdekes megfigyelni a képlet szimmetriáját is: a Q -ba helyezett forrás P' -ben pont akkora térerősséget hoz létre, mint a P' -be helyezett pontforrás Q -ban. Ez a *Helmholtz-féle reciprocitási tétel*. Az említett matematikai inkonzisztenciák ellenére (275) meglepően jól használható, és az esetek többségében igen pontos eredményt szolgáltat.

A (275) integrál még mindig nehezen kiértékelhető (mind analitikusan mind numerikusan). A képlet egyszerűsítése érdekében további közelítéseket vezetünk be. Ezek során az alábbiakban eljutunk a Huygens-Fresnel elvhez, a Fresnel-, majd a Fraunhofer-közelítéshez.

10. A FRESNEL-KIRCHHOFF INTEGRÁL KÖZELÍTŐ FORMULÁI

10.1. Közeltéri közelítés (Huygens-Fresnel-integrál)

A skalár közelítés miatt már megköveteltük, hogy a Σ apertúra jellemző méreténél R és R' legyen szignifikánsan nagyobb. Ebből kifolyólag alkalmazhatjuk az alábbi közelítéseket:

$$\cos(\theta) \approx -1 \text{ és } \cos(\theta') \approx 1, \quad (276)$$

ami akkor érvényes ha $\sin \theta' \lesssim 0,5$; $\cos \theta' > 0,87$. A Fresnel-Kirchhoff integrálból így ez lesz:

$$E(P') = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} E_0 \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'} dA = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} E_0 \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'} dA \quad (277)$$

Ebben az összefüggésben az apertúrát megvilágító EM sugárzást egyetlen pontforrás (Q) alkotja. Amikor az $E(P)$ téreloszlás felírható számos pontforrásból származó sugárzás szuperpozíciójaként, a fenti képlet egyszerűen általánosítható:

$$E(P') = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} E(P) \frac{e^{ikR'}}{R'} dA. \quad (278)$$

Ennek használatakor csak arra kell figyelni, hogy az $E(P)$ teret alkotó pontforrások mindegyikére teljesüljön a skalár diffrakció által megkövetelt kikötés: $\Sigma < R$. A (278) közelítés a komplex konstans leszámítva a Huygens-Fresnel elvnek felel meg.

10.2. Paraxiális közelítés (Fresnel-diffrakció)

Amennyiben kellően távol megyünk P' -vel az apertúrától, ugyanakkor közel maradunk a z -tengelyhez mind a Σ apertúrán, mind pedig a vizsgálo ernyőn, akkor élhetünk azzal a közelítéssel, hogy $R' \approx z'$. Mint látni fogjuk ezáltal a (278) összefüggés tovább egyszerűsíthető, egyszersmind ez a közelítés jelenti az első komoly korlátozást is a diffrakciós integrál használhatóságát illetően. Az egyszerűség kedvéért legyen a P' pont a z -tengelyen, P pedig a diffraktáló apertúra szélén. Ekkor az említett közelítés az alábbi alakban fogalmazható meg:

$$z' \gg R' - z' = \sqrt{(z' \cdot \operatorname{tg}(\theta'))^2 + z'^2} - z', \quad (279)$$

ami átrendezés és egyszerűsítés után ez lesz:

$$\operatorname{tg}^2(\theta') \ll 3 \Rightarrow \sin^2 \theta' \ll \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \theta' \ll \sqrt{3/4} \rightarrow \sin \theta' \lesssim \sqrt{3/4}/10 = 0,09. \quad (280)$$

Ez alapján a feltétel: $\sin(\theta') \lesssim 0,09$ lesz, vagyis beléptünk a *paraxiális közelítés* érvényességi körébe. Ilyen esetekben az $R' \approx z'$ közelítést (278) nevezőjében közvetlenül alkalmazhatjuk, de az exponensben nem. A fázis ugyanis R' függvényében rendkívül gyorsan változik, emiatt R' elsőrendű Taylor-soros közelítését alkalmazzuk:

$$\sqrt{1+b} \approx 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots \quad (281)$$

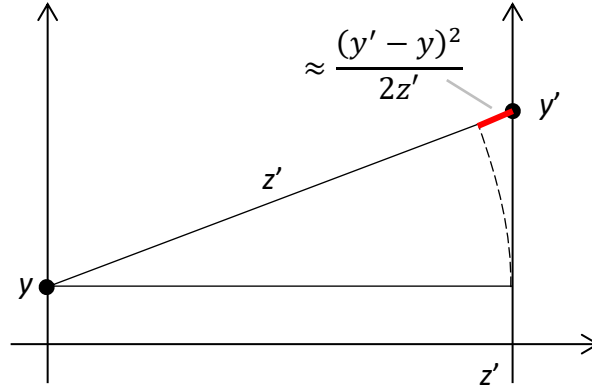
Tehát R' így írható:

$$R' = \sqrt{z'^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2} = z' \sqrt{1 + \left(\frac{x' - x}{z'}\right)^2 + \left(\frac{y' - y}{z'}\right)^2} \approx$$

$$\approx z' \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x' - x}{z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y' - y}{z'} \right)^2 \right) = z' + \frac{(x' - x)^2}{2z'} + \frac{(y' - y)^2}{2z'} \quad (282)$$

Ez a közelítés olyan, mintha a Huygens-féle gömbhullámok hullámfrontjait z' görbületi sugarú parabolikus felületeknek tekintenénk (ld. 46. ábra), ami akkor érvényes, ha a (281) szerinti négyzetes és magasabb rendű tagok által okozott fázistolás elhanyagolható:

$$\frac{2\pi z'}{\lambda} \left(\left(\frac{x' - x}{z'} \right)^2 + \left(\frac{y' - y}{z'} \right)^2 \right) \ll \pi \text{ [rad]} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{4\lambda}} ((x' - x)^2 + (y' - y)^2)^{\frac{2}{3}} \ll z' \quad (283)$$



46. ábra. A Fresnel-integrálban szereplő parabolikus hullámfrontok szemléltetése.

Ebben az esetben a diffrakciós integrál *Fresnel-közelítését* kapjuk konvolúciós felírással:

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'}}{i\lambda z'} \iint_{\Sigma} E(x, y) \cdot e^{i\frac{k}{2z'}((x'-x)^2 + (y'-y)^2)} dx dy = \frac{e^{ikz'}}{i\lambda z'} E(x, y) * e^{i\frac{k}{2z'}(x^2 + y^2)} \quad (284)$$

(283) feltétel alapján ez akkor használható, ha P' pont egy bizonyos távolságnál messzebb van a Σ apertúrától. Pl. egy $\varnothing 1,0$ mm átmérőjű 633 nm hullámhosszúságú lézernyalábnál $z' \gg 2,9$ mm (azaz $z' > 29$ mm). Ez alapján (284) még mindig érvényes a közeltérben, de csak nagyobb távolságtól kezdve, mint a Huygens-Fresnel-integrál. Az integráljel elé az apertúra és a P' pont közötti z' távolságon elszenvedett fázistolás *geometriai optikai közelítésben* kiszámolható értékét emeltük ki egy komplex konstans formájában. Fontos megjegyzés, hogy (284) igazolhatóan analitikus megoldása a paraxiális hullámegyenletnek.

10.3. Távoltéri közelítés (Fraunhofer-diffrakció)

A Fresnel-közelítés Fourier-transzformációs felírasmódja (284) átalakításával:

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2 + y'^2)}}{i\lambda z'} \iint_{\Sigma} E(x, y) \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x^2 + y^2 - 2x'x - 2y'y)} dx dy \quad (285)$$

Az integráljel előtt most már a Σ apertúra középpontjára centrált z' sugarú gömbhullám teljes fázistolása ki van emelve. Amennyiben kellően nagy távolságra vagyunk az apertúrától, az integrandusz exponensében lévő alábbi tag elhanyagolható:

$$\frac{k}{2z'}(x^2 + y^2) \ll \pi \text{ [rad]} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2) \ll z'. \quad (286)$$

A (286) feltétel értelmezéséhez a Fresnel-közelítésnél bemutatott számpéldával élve most azt kapjuk, hogy $z' \gg 395 \text{ mm}$ (ill. $z' > 4 \text{ m}$), azaz a Fresnel-közelítéshez képest két nagyságrenddel messzebb kell mennünk az apertúrától, hogy a Fraunhofer-közelítés érvényes legyen. A feltétel vizsgálata annyira fontos, hogy a kifejezést átrendezve D átmérőjű kör alakú apertúrára definiálták az ún. *Fresnel-számot*:

$$F \triangleq \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{\lambda z'} \quad (287)$$

Ha $F \ll 1$, akkor Fraunhofer-diffrakcióról, ha $F \geq 1$, akkor Fresnel-diffrakcióról beszélünk. A (286) feltétel teljesülése esetén megkapjuk a diffrakciós integrál legegyszerűbb kifejezését:

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2 + y'^2)}}{i\lambda z'} \iint_{\Sigma} E(x, y) \cdot e^{-i\frac{k}{z'}(x'x + y'y)} dx dy, \quad (288)$$

amit távoltéri, vagy *Fraunhofer-közelítésnek* neveznek. Ezt általában úgy szokták szemléltetni, hogy a nagy terjedési távolság miatt a Huygens-féle elemi gömbhullámok hullámfrontja ekkor már síknak tekinthető (ld. exponens). Ez azonban nem teljesen igaz, hiszen az elemi gömbhullámokhoz tartozik az integráljel elé kiemelt parabolikus fázisú tényező is, bár ez minden elemi gömbhullámra egyforma. Az értelmezés tehát helyesen az, hogy ebben a közelítésben az elemi gömbhullámok z' rádiuszú gömbbel közelíthetők. Természetesen ha x' és y' jóval kisebb mint z' , akkor az elemi gömbhullámok tekinthetők síknak.

A (288)-ben szereplő $1/i$ komplex konstans igazából most nyert értelmet: a diffraktáló Σ apertúra és a tőle nagy z' távolságra, a z -tengelyen lévő pont közötti fáziskülönbség nem a geometriai optikailag kiszámolható $k \cdot z'$, hanem egy ehhez képest 90° fokkal *siettetett* érték! (Ne felejtjük el, hogy tárgyalásunkban a fázis a terjedés irányában növekszik, de a valóságban csökken, azaz késik.) A jelenséget *fázisanomáliának* nevezik, mert olyan, mintha a diffrakció miatt kissé megnőne a hullámhossz.

(288) tulajdonképpen nem más mint 2D Fourier transzformáció f_x és f_y térfrekvenciákkal. Emlékeztetőül az 1D Fourier transzformáció képlete:

$$\mathcal{F}\{g(x)\} = G(f_x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i2\pi f_x x} dx \quad ; \quad f_x = \frac{x'}{\lambda z'} \quad ; \quad f_y = \frac{y'}{\lambda z'} \quad (289)$$

Az inverz transzformáció segítségével könnyebben értelmezhetjük (288) kifejezést. Ehhez először átrendezzük (288)-et, hogy az új összefüggés jobb oldala pontosan Fourier-transzformált alakú legyen:

$$\frac{i\lambda z'}{e^{ikz'} e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2 + y'^2)}} E(x', y') = \iint_{\Sigma} E(x, y) \cdot e^{-i\frac{k}{z'}(x'x + y'y)} dx dy \quad (290)$$

Mindkét oldalt inverz Fourier-transzformálva és felhasználva, hogy a jobb oldal inverz Fourier-transzformáltja nem más mint $E(P)$:

$$E(x, y) = \frac{i\lambda z'}{e^{ikz'}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k}{2z'}(x'^2 + y'^2)} \cdot E(x', y') \cdot e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y, \quad (291)$$

ahová behelyettesítve a térfrekvenciák (289) képletét, megkapjuk az inverz Fourier-transzformált kifejezését:

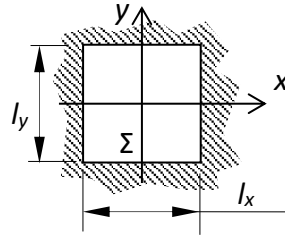
$$E(x, y) = \frac{i \cdot e^{-ikz'}}{\lambda z'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)} \cdot E(x', y') \cdot e^{i\frac{k}{z'}(x'x+y'y)} dx' dy'. \quad (292)$$

(292) integranduszában az exponenciális kifejezés *síkhullámokat* ír le, amit úgy értelmezhetünk, hogy a 2D Fourier-transzformáció harmonikus síkhullámokra bontást jelent. Az analógia mindazonáltal nem tökéletes, mivel az inverz transzformáció képletében megjelenik egy gömbhullám fázistagja is, ami akkor tűnne el, ha a P' pontokat nem egy sík felületen, hanem egy, a Σ apertúra középpontjára centrált gömbön vennénk fel. A síkhullám-összetevők hullámszámvektor-komponensei a következők:

$$k'_x = k \frac{x'}{z'} ; \quad k'_y = k \frac{y'}{z'}. \quad (293)$$

10.4. Fraunhofer-diffrakció felhasználása

A Fraunhofer-diffrakciós integrál egyszerűbb esetekben analitikusan is kiértékelhető. Elsőként nézzük meg egy téglalap alakú apertúra távoltéri diffrakciós képét.



47. ábra. Téglalap-apertúra méreteinek megadása.

Az $E(P)$ térerősség az apertúrán belül legyen konstans 1, azon kívül nulla:

$$E(x, y) := \text{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) ; \quad \text{rect}(a) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha } |a| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ha } |a| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (294)$$

Ez a z-tengely irányába terjedő homogén, de levágott szélű síkhullámnak felel meg a Σ apertúrán történő áthaladás után. Ezt beírva (288)-be:

$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)}}{i\lambda z'} \iint_{\Sigma} e^{-i\frac{k}{z'}(x'x+y'y)} dx dy \quad (295)$$

Az integrál analitikusan kiértékelhető:

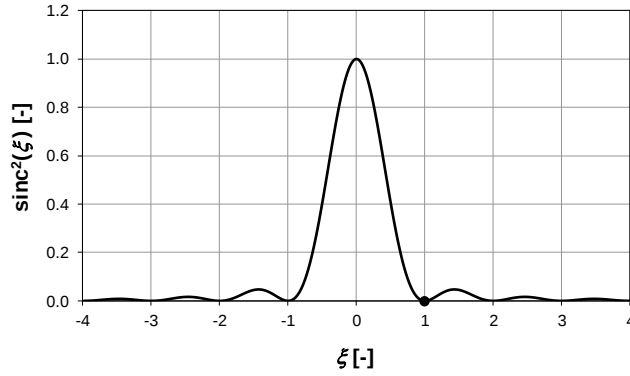
$$E(x', y') = \frac{e^{ikz'} e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)}}{i\lambda z'} l_x l_y \text{sinc}\left(\frac{l_x x'}{\lambda z'}\right) \text{sinc}\left(\frac{l_y y'}{\lambda z'}\right) \quad (296)$$

$$I(x', y') = \langle S \rangle = \frac{v\varepsilon}{2} |E|^2 = \frac{v\varepsilon}{2} \frac{l_x^2 l_y^2}{\lambda^2 z'^2} \text{sinc}^2\left(\frac{l_x x'}{\lambda z'}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{l_y y'}{\lambda z'}\right) \quad (297)$$

ahol a $\text{sinc}(\xi)$ függvény definíciója:

$$\text{sinc}(\xi) \triangleq \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} ; \quad \xi \triangleq \frac{l_x x'}{\lambda z'} \text{ ill. } \xi \triangleq \frac{l_y y'}{\lambda z'}. \quad (298)$$

Az intenzitásfüggvény 1-re normált jellegzetes alakja a 48. ábrán tekinthető meg.

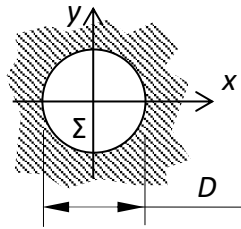


48. ábra. Téglalap-apertúra távolféri diffrakciós intenzitáseloszlása.

Azt a pontot az x - illetve az y -tengelyen, ahol az intenzitás első zérushelyét felveszi, *Nyquist-apertúrának* nevezik:

$$\xi = 1 \Rightarrow x_{\text{Nyquist}} = \frac{\lambda z'}{l_x}. \quad (299)$$

Kör alakú apertúra távolféri diffrakciós képe a fentiekhez hasonlóan határozható meg, csak a 2D Fourier-transzformáció helyett ennek hengerkoordinátarendszerben felírt megfelelőjét, az ún. *Hankel-transzformációt* kell elvégezni.



49. ábra. Körapertúra méreteinek megadása.

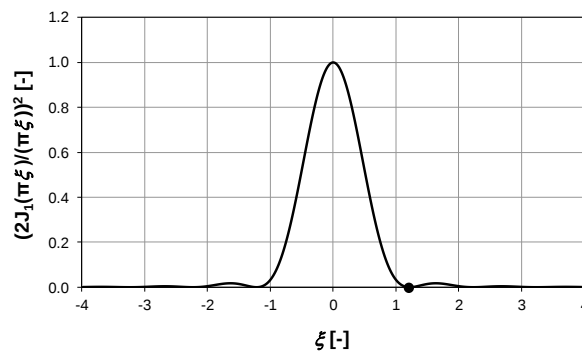
A levezetés mellőzésével az eredmény:

$$I(r') = \frac{v\varepsilon}{2} \left(\frac{kD^2}{8z'} \right)^2 \left(2 \frac{J_1(\pi\xi)}{\pi\xi} \right)^2, \quad (300)$$

ahol $J_1(\pi\xi)$ az ún. elsőfajú, elsőrendű Bessel-függvény, argumentumának definíciója pedig:

$$\pi\xi \triangleq \frac{kDr'}{2z'} \rightarrow \xi = \frac{Dr'}{\lambda z'}; \quad r^2 \triangleq x'^2 + y'^2 \quad (301)$$

A diffrakciós folt 1-re normált intenzitáseloszlását ebben az esetben *Airy-foltnak* nevezik. A téglalapapertúra diffrakciós képével összevetve megállapíthatjuk, hogy a mellékmaximumok itt sokkal kisebbek.



50. ábra. Körapertúra távolféri diffrakciós intenzitáseloszlása.

Az első zérushely neve *Airy-rádusz*, értéke $J_1(\pi\xi) = 0 \Rightarrow \xi = 1,22$ alapján:

$$R_{\text{Airy}} = 1,22 \frac{\lambda z'}{D}. \quad (302)$$

10.5. Fresnel-diffrakció felhasználása

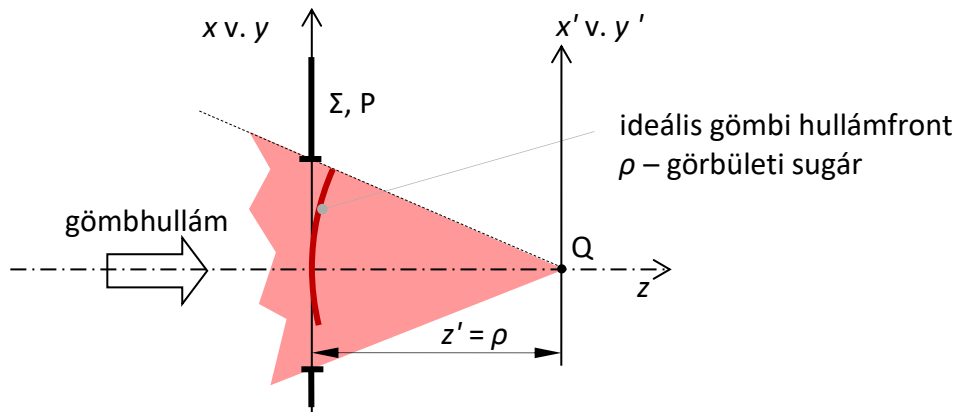
A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy miként számolható ki a téreloszlás egy ideális gömbhullám x', y' fókusz síkjában. A hullám görbületi sugara ρ a Σ apertúránál.

Feltétel: $\rho \gg \Sigma$ (paraxiális közelítés, hogy a *Fresnel-közelítés* érvényes legyen). A megvilágítás tehát egy Q pontforrás, amely *felé* tart a fény:

$$E(x, y) := E_0 \cdot e^{-ik\sqrt{x^2+y^2+\rho^2}}, \quad (303)$$

ahol a térerősségamplitudót konstansnak tekintjük a Σ apertúrában. Az exponensben a paraxiális közelítés miatt ismét Taylor-soros közelítést alkalmazhatunk (első rendig felírva):

$$E(x, y) \approx E_0 \cdot e^{-ik\left(\rho + \frac{x^2}{2\rho} + \frac{y^2}{2\rho}\right)} \quad (304)$$



51. ábra. Magyarázat a gömbhullám fókusz síkjában fellépő téreloszlás meghatározásához.

Ezt írjuk be a *Fresnel-közelítés* Fourier-transzformációs (285) képletébe, és vegyük figyelembe, hogy most pont a fókusz síkban vizsgálódunk, azaz amikor $z' = \rho$:

$$E(x', y') = \frac{e^{i\frac{k(x'^2+y'^2)}{2\rho}}}{i\lambda\rho} \iint_{\Sigma} E_0 \cdot e^{-i\frac{k}{\rho}(x'x+y'y)} dx dy \quad (305)$$

Ez *formailag* megegyezik a Fraunhofer-diffrakció (288) képletével, csak z' helyett ρ -szerepel az egyenletben! Mivel a diffraktáló nyaláb (azaz Q középpontú gömbhullám) fázisa a Q pontban zérus, a geometriai optikailag meghatározható $k \cdot \rho$ fázistolás kiesik a képletből. Az ehhez a (nulla) értékhez viszonyított fázis a fázisanomália miatt itt is siet 90° -ot.

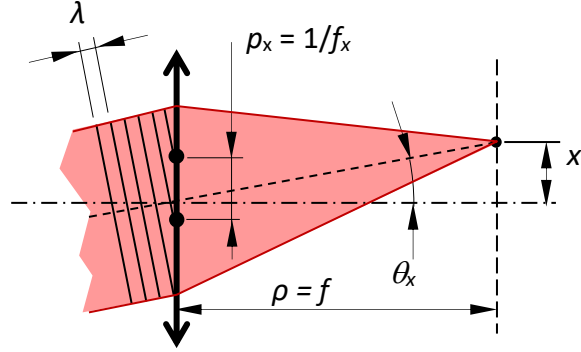
Általában egy optikai rendszert elhagyó hullámfront nem ideális, hanem aberrációkkal terhelt:

$$E(x, y) = E_0 \cdot e^{ik \cdot OPD(x, y)} \cdot e^{-ik\left(\rho + \frac{x^2}{2\rho} + \frac{y^2}{2\rho}\right)}, \quad (306)$$

ahol $OPD(x, y)$ optikai úthossz különbség írja le a hullámfront ideális gömbtől való eltérését. Az elektromos térerősség abszolútérték négyzetéből megkapjuk a számunkra általában leginkább érdekes intenzitáseloszlást:

$$I = \frac{v\varepsilon}{2} \frac{E_0^2}{\lambda^2 \rho^2} \left| \iint_{\Sigma} e^{ik \cdot OPD(x,y)} \cdot e^{-i\frac{k}{\rho}(x'x+y'y)} dx dy \right|^2. \quad (307)$$

Ilyen esetekben a (303)-el bevezetett ideális gömbhullámot *Gauss-féle referenciagömbnek* nevezik. Amennyiben a Σ apertúrában egy f effektív fókusz távolságú vékonylencse helyezkedik el ($\rho = f$), ld. 52. ábra, akkor a balról érkező sugárzás Fourier-transzformáltja pont a lencse fókusz síkjában jelenik meg.



52. ábra. Gömbhullám fókusz síkjának pontjai és a térfrekvenciák kapcsolata.

A Fraunhofer-diffrakciónál tanultak alapján a fókusz sík különböző pontjainak a következő térfrekvenciák feleltethetők meg:

$$f_x = \frac{x'}{\lambda \cdot f} \rightarrow k_x = 2\pi \cdot f_x = \frac{2\pi \cdot x'}{\lambda \cdot f} \rightarrow \theta_x \approx \tan \theta_x = \frac{k_x}{k} = \frac{x'}{f} \text{ és } \theta_y \approx \frac{y'}{f} \quad (308)$$

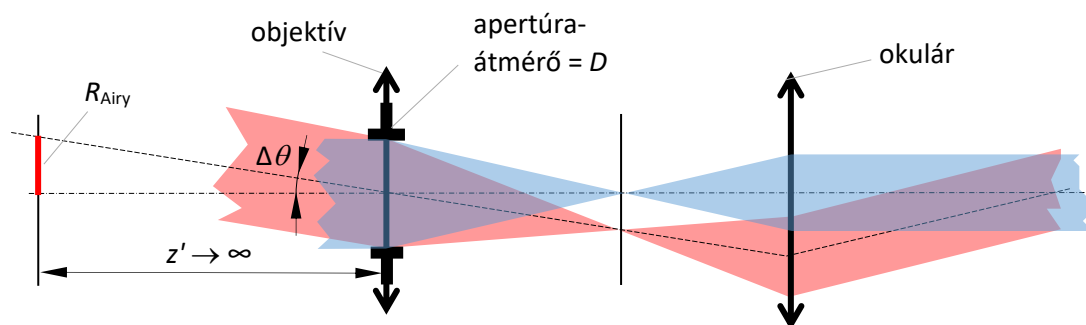
Ha a lencse apertúrájának síkjában a belépő tér egy olyan síkhullám, amely θ_x és θ_y szöget zár be a z-tengellyel, a fókusz síkban kapott téreloszlás egy olyan fókuszfolt lesz, amelynek a középpontja x' ill. y' távolságra eltolódik az optikai tengelytől. Tehát a 2D Fourier-transzformált egy adott térfrekvenciájú komponensének fizikailag egy meghatározott szögű síkhullám felel meg.

A (305) integrál a Fraunhofer-közelítésnél alkalmazott módon kiértékelhető, amiből kör apertúránál, ideális gömb hullámfront esetén megkapjuk a már bemutatott Airy-foltot. Ezeket az eredményeket felhasználva a D átmérőjű vékonylencse képsíkban mért Airy-folt sugara paraxiális közelítésben a következő:

$$R_{\text{Airy}} = 1,22 \frac{\lambda f}{D}. \quad (309)$$

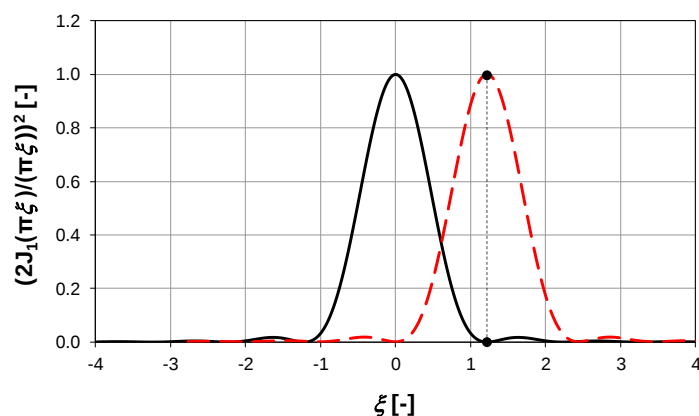
Megjegyzendő, hogy megfelelő módszerekkel lehet olyan lencserendszereket tervezni, amelyek nem csak a paraxiális közelítésben Fourier-transzformálnak; ezeket Fourier-transzformációs lencséknek nevezik.

10.6. Fraunhofer-diffrakció alkalmazása: távcső felbontóképessége



53. ábra. Kepler-távcső felbontóképességének meghatározása.

Rayleigh-féle felbontás kritérium: két vizuálisan még felbontható diffrakciós folt egyikének az első minimuma egybeesik a másik maximumával, ld. 54. ábra.

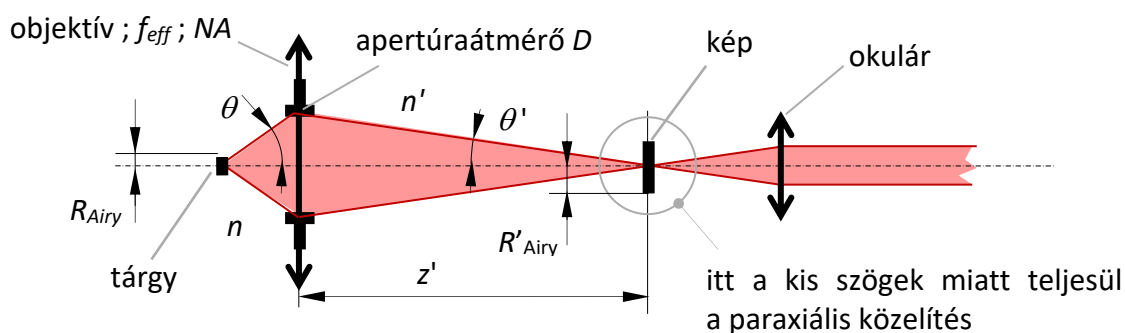


54. ábra. A felbontóképesség Rayleigh-kritériumának szemléltetése.

Távcsőnél az az apertúra emeljen létrejön a fénydiffrakció, az objektív lencse v. főtükör apertúrája. A körapertúra Fraunhofer-diffrakciós modelljéből a távcső szögfelbontása:

$$\Delta\theta \approx \text{tg}(\Delta\theta) = \frac{R_{\text{Airy}}}{z'} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \quad (310)$$

10.7. Fresnel-diffrakció alkalmazása: mikroszkóp felbontóképessége (kieg. any.)



55. ábra. Mikroszkópjelölő felbontóképességének meghatározása.

Kis numerikus aperúrájú ($\sin \theta < 0,1$) körapertúrás lencse Rayleigh-felbontása a képoldalon ld. (309):

$$R'_{Airy} = 1,22 \frac{\lambda z'}{D} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta' = \frac{D}{2z'} = 0,61 \frac{\lambda}{R'_{Airy}} \approx \sin \theta' \quad (311)$$

Általában ezt a formulát nem használhatjuk közvetlenül mikroszkóp-objektívek, mivel azok tipikusan nagy numerikus apertúrájú rendszerek. Mindazonáltal egyúttal aplanatikus leképezőrendszerek is, ebből kifolyólag teljesítik az ún. Abbe-féle szinuszfeltételt:

$$R_{Airy} \cdot n \cdot \sin \theta = R'_{Airy} \cdot n' \cdot \sin \theta' \quad (312)$$

amiből a tárgyoldali felbontás:

$$R_{Airy} = 0,61 \frac{\lambda_0}{n' \sin \theta'} = 0,61 \frac{\lambda_0}{NA}. \quad (313)$$

(Bővebb magyarázat: ld. pl. [3].)

10.8. Rés Fraunhofer-diffrakciós téreloszlása (kiegészítő anyag)

A rés egy egydimenziós struktúra, melynek távoltéri téreloszlása kétdimenziós diffrakciós problémaként kezelendő. Sajnos a téglalapapertúra 3D Fraunhofer-diffrakciós téreloszlásából a megoldás határértékképzéssel nem származtatható, mert ha az apertúra egyik mérete tart a végtelenhez, akkor maga a Fraunhofer-közelítés érvényét veszti. Emiatt az analitikus megoldás szigorúan véve a 2D hullámegyenletből és a 2D Green-tételből vezethető le, viszont kis ügyeskedéssel kiokoskodható (288)-ből. A megoldáshoz olyan térerősséggel kell megvilágítani az l_x és l_y szélességű téglalap alakú Σ apertúrát, amely szorzat alakba írható:

$$E(x, y) := E_x(x) \cdot E_y(y) \quad (314)$$

Ekkor a diffrakciós integrál is felbontható két tényező szorzatára:

$$E(x', y') = \left(\frac{e^{\frac{ikz'}{2}} \cdot e^{\frac{k}{2z'}x'^2}}{\sqrt{i\lambda z'}} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} E_x(x) \cdot e^{-\frac{k}{z'}x'x} dx \right) \cdot \left(\frac{e^{\frac{ikz'}{2}} \cdot e^{\frac{k}{2z'}y'^2}}{\sqrt{i\lambda z'}} \int_{-l_y/2}^{l_y/2} E_y(y) \cdot e^{-\frac{k}{z'}y'y} dy \right) \quad (315)$$

Réseknél a megvilágító tér ilyen alakú:

$$E(x, y) := \sqrt{E_0} \mathcal{E}(x) \cdot \sqrt{E_0} \mathcal{E}(y), \quad (316)$$

ahol E_0 a térerősségamplitúdó az $x = y = 0$ pontban, és y -irányú rés esetén $\mathcal{E}(y) := 1$. Ekkor a diffrakciós integrál így néz ki:

$$E(x', y') = \left(\frac{e^{\frac{ikz'}{2}} \cdot e^{\frac{k}{2z'}x'^2}}{\sqrt{i\lambda z'}} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} \sqrt{E_0} \mathcal{E}(x) \cdot e^{-\frac{k}{z'}x'x} dx \right) \cdot \left(\frac{e^{\frac{ikz'}{2}} \cdot e^{\frac{k}{2z'}y'^2}}{\sqrt{i\lambda z'}} \sqrt{E_0} \int_{-l_y/2}^{l_y/2} e^{-\frac{k}{z'}y'y} dy \right) \quad (317)$$

Mivel y -irányban a rés végtelen, ebben az irányban vizsgálva az EM tér egy geometriai optikailag terjedő síkhullámként viselkedik, azaz tetszőleges z' koordinátára megőrzi a $z' = 0$ síkban felvett $\sqrt{E_0}$ értékét, valamint a kezdőfázisát. Ezen megfontolások alapján a jobb oldali zárójelben lévő kifejezésnek ennek kell lennie:

$$e^{\frac{ikz'}{2}} \sqrt{E_0} \quad (318)$$

A rés térerősségeloszlása (316) alapján:

$$E(x) = E_0 \mathcal{E}(x) \quad (319)$$

Ezzel megkapjuk a mértékegység helyes végeredményt:

$$E(x') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}x'^2}}{\sqrt{i\lambda z'}} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} E(x) \cdot e^{-i\frac{k}{z'}x'x} dx. \quad (320)$$

Amely valóban egy hengerhullám térerőssége ha $E(x) = \text{const.}$, hiszen az intenzitás $1/z'$ -vel csökken. Érdekesség, hogy 2D esetben a fázisanomália nem 90° , hanem csak 45° -os eltérést ad a síkhullámhoz képest.

11. STATISZTIKUS OPTIKA – IDŐBELI KOHERENCIA

Források: [3], [10], [11], [12], wikipedia

11.1. Bevezetés – a koherencia fogalmának kialakulása

A 17. század második felétől egyre több megfigyelés jelezte, hogy a fényről alkotott addigi fogalmak nem teljesen felelnek meg a valóságnak. Grimaldi a geometriai úton nem leírható fényelhajlást fedezte fel árnyékok szélén. Az effektust „*diffraction*”-nak (széttöredezésnek) keresztelte el (magyarul fényelhajlásnak hívjuk), és a kialakuló mintázatokat az éter (a fényrészecskéket hordozó képzeletbeli közeg) hullámzásaival magyarázta. Mikroszkópos kísérleteivel Hooke a színpigmenteket nem tartalmazó tárgyak (pávatoll, rovarpáncél) színes, irányfüggő reflexióját vizsgálta (irizálás). A század végén Huygens elasztikus hullámok (pontosabban impulzusszerű zavarok) segítségével már le is tudta írni a fényelhajlás alaptulajdonságait. A 18. századi fejlődést nagyban gátolta ugyan Newton részecske-elmélete, de a nagy tudós akaratlanul is hozzájárult a hullámelmélet fejlődéséhez: ő jegyezte le elsőként a két üveglemez közötti vékony légrétegben kialakuló periodikus mintázatot (Newton-gyűrűk, vékony lemezek és hárták színe), illetve felfedezte, hogy a fehér fény színek összegéből áll (a „*spectrum*” kifejezést is ő alkalmazta először a magyarul színeképnek nevezett fogalomra). A 19. sz. elején Young a modern optika *hullámtani* alapjait fektette le a két résen áthaladó és vékonyrétegekről (pl. szappanbuborék) visszaverődő fény szokatlan viselkedésének magyarázatával. A tapasztalt hatásokat párhuzamba állította a víz- és hanghullámok egymást erősítő és gyengítő képességével, és az effektusra bevezette az *interferencia* fogalmát. Kétréses *hullámfrontosztó* interferométerének segítségével megállapította, hogy a réseket megvilágító fénynek *azonos forrásból* kell származnia azért, hogy az interferencia érzékelhető legyen. A jobb láthatóság érdekében a napfényt először egy kicsi lyukon engedte át, és az így kapott pontforrással világította meg az interferenciát létrehozó további két rést. A szín fogalmát ő kapcsolta először a fény, mint rezgés periodicitásához, interferencia-kísérletei segítségével meg is határozta az alapszínek hozzávetőleges *hullámhosszát*. A hullámelméletet végül Fresnel foglalta egységes keretbe 1817-ben.

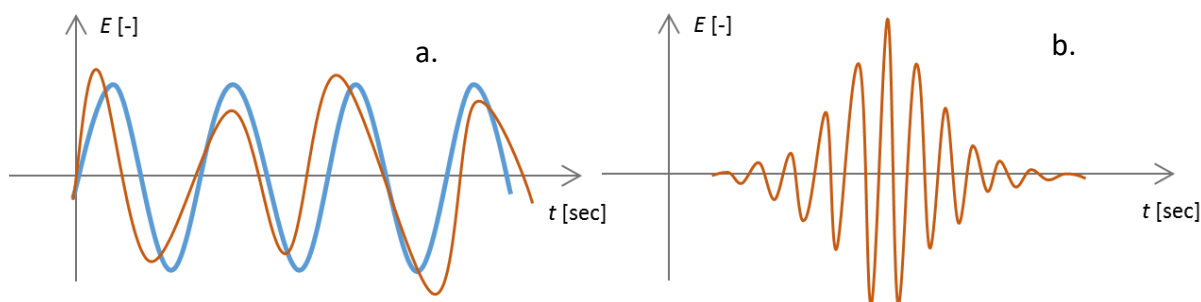
Fraunhofer 1814-ben prizmás spektroszkóppal végzett vizsgálatai során sötét vonalakat fedezett fel a Nap színeképében. Ezek magyarázatát 1861-ben adta meg Bunsen és Kirchhoff, miszerint az elemek rájuk jellemző *monokromatikus* (egyszínű) hullámokat nyelnek el és sugároznak ki (abszorpció, emisszió). A kémia hívó szavára egycsapásra beindult a színeképelemzés. 1862-ben Fizeau publikálta *amplitúdóosztó* interferométeres vizsgálatainak eredményét. Egyszínű, tehát adott hullámhosszúságúnak gondolt fényt vizsgált a róla elnevezett amplitúdóosztó kéthullámú interferométerben, ahol a fényforrás sárga nátriumláng volt (Na, D-vonal). A tudós azt tapasztalta, hogy az interferogram az úthosszkülönbség függvényében először szinte teljesen eltűnik, majd újból megjelenik. Igen helyesen azt a következtetést vont le, hogy a látszólag egybefüggő D-vonal valójában két igen közeli, nagyjából azonos teljesítményű komponenst tartalmaz. (A kvantummechanikai atommodellnek megfelelően valóban ez a helyzet: a kérdéses spektrumvonalak a nátrium $3p \rightarrow 3s$ átmenet emissziójából erednek, ahol a p-állapotnak finomsztruktúrája van, azaz két közeli energiaszintet tartalmaz; a megfelelő hullámhosszak 589,0 és 589,6 nm.) Prizmás spektroszkóppal maga Fizeau is meggyőződött elmélete helyességéről. Tehát alig, hogy monokromatikusnak gondolt fényt kezdtek vizsgálni interferométerrel, kiderült, hogy az egyszínűnek látszó fény mégsem teljesen egy hullámhosszúságú, és az interferogram láthatósága függ a spektrum szélességétől.

1865-körül Verdet újragondolta Young kétréses kísérletét. Arra a kérdésre kereste a választ, hogy közvetlen (térben szűretlen) napfényt alkalmazva *milyen messzire* lehet egymástól a két rés, hogy még látható maradjon az interferencia. (Számításai alapján ez a távolság 20 μm -nek adódott.) 1868-ban Fizeau javasolt egy hullámfrontosztó interferométert, amelynek a segítségével elvben távoli objektumok (bolygók, csillagok) látszólagos átmérőjét lehet meghatározni. Gondolatkísérletében egy távcső főtükrét kimaszkolta, a fény csak két távoli nyíláson át érhetette el a fókuszt. A kialakuló interferenciámintázat láthatósága a megfigyelt objektum *méretétől* függ. Az elrendezést később Michelsonnak sikerült megvalósítania: csillagászati interferométerével először a Jupiter Galilei-holdjainak átmérőjét mérték meg 1891-ben. Ugyanettől az évtől publikálta a spektrumanalízis terén végzett kutatásának eredményeit Michelson: a róla elnevezett, 1880-ban feltalált amplitúdóosztó interferométerrel számos elem színekének vonalait tanulmányozta, az interferogram *láthatóságát* vizsgálva az úthosszkülönbség függvényében (ez az alapja a mai interferencia v. Fourier-transzformációs spektroszkópiának). Kiderült, hogy az elemi spektrumvonalak nem végtelenül keskenyek, hanem a fényenergia folytonosan oszlik el egy kis hullámhossztartományon. Michelson meghatározta az összefüggést az interferogram intenzitás – úthosszkülönbség görbe és a teljesítményspektrum alakja között, ami nem más mint az (1830 körül Sturm és Liouville által megfogalmazott) *Fourier-transzformáció*. A Michelson által legmonokromatikusabbnak talált $\lambda_0 = 643,8$ nm-es kadmium vonal interferogramjának láthatósága kb. 15 cm-es úthosszkülönbségnél esik felére, ez alapján a spektrum szélessége: $\Delta\lambda_{\text{FWHM}} = 0,0013$ nm.

1907-ben Laue publikálta két fénynyaláb korrelációjával kapcsolatos kutatásainak eredményeit. Cikkében a korreláció számszerűsítésére bevezette a *koherencia* fogalmát (minél koherensebb a fény, annál korreláltabb, azaz annál inkább képes interferenciát létrehozni). Wiener, Schrödinger, van Cittert és Zernike kutatásai nyomán a koherencia fogalma pontosodott, szétvált a *térbeli*, és *időbeli* koherencia fogalma. Az előbbi Young kétréses kísérleteihez és Michelson csillagászati interferométeréhez, az utóbbi Fizeau és Michelson spektrális vizsgálataihoz kapcsolható. Amplitúdóosztó interferométerekben (pl. Michelson) az időkülönbséget (úthosszkülönbséget) változtatjuk és az interferogram láthatóságát figyeljük. A fény (Rømer 1675-ös mérései után ismert, később pontosított) sebességéből könnyen kiszámítható, hogy az adott láthatóság-csökkenéshez tartozó úthosszkülönbség megtételéhez mennyi idő szükséges. Ezt az időtartamot *koherenciaidőnek* nevezzük. A térbeli koherencia elméletének leírását Zernike alkotta meg 1939-ben, bevezetve többek között a jelenség mértékének számszerűsítésére alkalmazott *koherenciafokot*. (A teljesség kedvéért megemlítendő, hogy létezik még polarizációs koherencia is, melynek jellemzésére Wiener 1928-as publikációja óta a *koherenciamátrixot* használják.) A koherencia fontosságára Wolf hívta fel a figyelmet az ide vonatkozó elméletek rendszerezésével, összegzésével és továbbfejlesztésével a Born-Wolf: Principles of Optics 1959-ben megjelent első kiadásában.

A statisztikus függvényanalízis fejlődése nyomán az 1930-as évekre vált lehetővé az időbeli koherencia fizikai értelmezése és precíz leírása. Statisztikai szempontból egy jel (rezgés, hullám) tekinthető determinisztikusnak vagy indeterminisztikusnak. Az előbbiekre példa a lineáris rendszerek leírására kiválóan alkalmas harmonikus rezgés, amit optikában monokromatikus hullámnak nevezünk. Ilyen hullámmal elvileg végtelen úthosszkülönbség mellett is kapható interferencia, azaz a rezgés koherenciaideje végtelen (ld. kék görbe az 56.

ábrán). Indeterminisztikus jelet pl. úgy állíthatunk elő, ha végtelen sok, különböző frekvenciájú és véletlen kezdőfázisú harmonikus rezgést összegzünk (ld. narancs görbe).



56. ábra. Azonos teljesítményspektrumú hullámok: véletlen kezdőfázisú spektrális komponensek (a), és azonos kezdőfázisú spektrális komponensek (b) esetén.

Amennyiben a kezdőfázisok nem véletlenszerűek, hanem pl. azonosak, akkor impulzust fogunk kapni (ld. jobb oldali ábra). Bár az impulzusok önmagukban determinisztikusak, véges időtartamuk miatt az ennél nagyobb időkülönbségek esetén itt sem kapunk interferenciát. Az impulzusok tárgyalásától a továbbiakban eltekintünk.

Az indeterminisztikus rezgések egyik fontos jellemzője a véges (tehát nem nulla) szélességű *spektrális teljesítménysűrűség* (power spectral density), azaz egy ilyen hullám nem tekinthető monokromatikusnak. További fontos statisztikus jellemző az *autokorrelációs függvény*, amely megmutatja, hogy a rezgés fázisállapota két, adott távolságra lévő időpillanat között mennyire korrelált, mennyire van összhangban (mennyire koherens). Ha a vizsgált időintervallum szélessége zérus, akkor tökéletes a korreláció, az autokorrelációs függvény értéke maximális. Determinisztikus jeleknél (pl. monokromatikus rezgésnél) az autokorrelációs függvény értéke bármilyen széles időintervallumra konstans, indeterminisztikus jeleknél viszont fokozatosan nullára csökken. Egy interferogram láthatósága szoros kapcsolatban van a rezgés autokorrelációs függvényével. A spektrumvonalak vizsgálatakor Michelson arra jött rá, hogy indeterminisztikus jeleknél minél szélesebb frekvenciatartományra terjed ki a spektrális teljesítménysűrűség, annál keskenyebb az autokorrelációs függvény (és fordítva), tehát annál kisebb a koherenciaidő, azaz a rezgés egyre kevésbé koherens. A matematikában, teljesen általános formában ezt az 1930-as években felírt Wiener-Khinchin-tétel fogalmazza meg: az autokorrelációs függvény és a spektrális teljesítménysűrűség egymásnak kölcsönös Fourier-transzformáltjai. A modern fizikának az az ága, amely indeterminisztikus fénysugárzások leírásával foglalkozik a *statisztikus optika*, melynek részletekbe menő taglalását [13]-ben találhatjuk meg.

11.2. Kéthullámú interferencia két frekvencia esetén

A továbbiakban két közel azonos irányba haladó, azonos polarizációjú síkhullám („a” és „b”) interferenciáját vizsgáljuk (tehát paraxiális skalár közelítésben), ugyanis ezen a példán keresztül lehet a legegyszerűbben megismerni az időbeli koherencia interferogramokra gyakorolt hatásával. Valós terminológiát használva az eredő intenzitás ekkor:

$$I(\mathbf{r}, T) = \nu \varepsilon \langle (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = \nu \varepsilon \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 dt \quad (321)$$

Fizeau nyomán nézzük meg először két olyan hullám interferenciáját, amelyek két-két eltérő körfrekvenciájú harmonikus komponenst (ω_1 és ω_2) tartalmaznak. A könnyebb

megkülönböztethetőség végett E_0 helyett innentől A -val és B -vel jelöljük a két interferáló nyaláb amplitúdóit:

$$\begin{aligned} E_a(\mathbf{r}, t) &= A_1 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_{a1} \mathbf{r} + \varphi_{a1}) + A_2 \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_{a2} \mathbf{r} + \varphi_{a2}) \\ &= A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \end{aligned} \quad (322)$$

$$\begin{aligned} E_b(\mathbf{r}, t) &= B_1 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_{b1} \mathbf{r} + \varphi_{b1}) + B_2 \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_{b2} \mathbf{r} + \varphi_{b2}) \\ &= B_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + B_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \end{aligned} \quad (323)$$

Természetesen feltételezzük, hogy $\mathbf{k}_{a1} \parallel \mathbf{k}_{a2}$ és $\mathbf{k}_{b1} \parallel \mathbf{k}_{b2}$. A négyzetre emelést elvégezve:

$$\begin{aligned} (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 &= \\ &= A_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + A_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + \\ &+ A_1 B_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + A_1 B_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + \\ &+ A_2 A_1 \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + A_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + \\ &+ A_2 B_1 \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + A_2 B_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + \\ &+ B_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + B_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + \\ &+ B_1 B_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + B_1 B_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + \\ &+ B_2 A_1 \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) + B_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) + \\ &+ B_2 B_1 \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \cos(\omega_1 t + \Phi_{b1}) + B_2 B_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_{b2}) \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) \end{aligned} \quad (324)$$

Ezután tagonként elvégezzük az időátlagolást (mivel az lineáris művelet). Először olyan rövid T -t választunk, hogy csak az EM tér 10^{14} Hz körüli rezgései átlagolódnak ki (mintha lenne egy gyors detektorunk, ami 10^{14} Hz alatt levág). A kifejezés azon tagjai, amelyekben a szorzattényezők *azonos argumentumú* koszinuszfüggvényt tartalmaznak konstans értéket vesznek fel. Például:

$$\langle A_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \rangle = \frac{A_1 A_1}{2} \quad (325)$$

Azokat a tagokat, amelyek tényezői *különböző argumentumú* koszinuszfüggvényt tartalmaznak, az alábbi trigonometrikus azonosság segítségével bontjuk ketté:

$$2 \cos(a) \cos(b) \equiv \cos(a + b) + \cos(a - b) \quad (326)$$

Például:

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \Phi_{a1}) \cos(\omega_2 t + \Phi_{a2}) &= \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} [\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \Phi_{a1} + \Phi_{a2}) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{a2})] \end{aligned} \quad (327)$$

Az ilyen tagok időátlagolásakor az összegfrekvenciás tag a nagy rezgésszám miatt mindig nullát eredményez. Ezek alapján (324)-ből a következő marad:

$$\begin{aligned}
\langle (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = & \\
= & \frac{A_1 A_1}{2} + \frac{A_1 A_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{a2}) + \\
& + \frac{A_1 B_1}{2} \cos((\omega_1 - \omega_1)t + \Phi_{a1} - \Phi_{b1}) + \frac{A_1 B_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{b2}) + \\
& + \frac{A_2 A_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{a2} - \Phi_{a1}) + \frac{A_2 A_2}{2} + \\
& + \frac{A_2 B_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{a2} - \Phi_{b1}) + \frac{A_2 B_2}{2} \cos((\omega_2 - \omega_2)t + \Phi_{a2} - \Phi_{b2}) + \\
& + \frac{B_1 A_1}{2} \cos((\omega_1 - \omega_1)t + \Phi_{b1} - \Phi_{a1}) + \frac{B_1 A_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{b1} - \Phi_{a2}) + \\
& + \frac{B_1 B_1}{2} + \frac{B_1 B_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{b1} - \Phi_{b2}) + \\
& + \frac{B_2 A_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{b2} - \Phi_{a1}) + \frac{B_2 A_2}{2} \cos((\omega_2 - \omega_2)t + \Phi_{b2} - \Phi_{a2}) + \\
& + \frac{B_2 B_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{b2} - \Phi_{b1}) + \frac{B_2 B_2}{2}
\end{aligned} \tag{328}$$

A kifejezést átrendezve:

$$\begin{aligned}
\langle (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = & \frac{A_1 A_1}{2} + \frac{A_2 A_2}{2} + \frac{B_1 B_1}{2} + \frac{B_2 B_2}{2} + \\
& + \frac{A_1 B_1}{2} \cos(\Phi_{a1} - \Phi_{b1}) + \frac{A_2 B_2}{2} \cos(\Phi_{a2} - \Phi_{b2}) + \\
& + \frac{B_1 A_1}{2} \cos(\Phi_{b1} - \Phi_{a1}) + \frac{B_2 A_2}{2} \cos(\Phi_{b2} - \Phi_{a2}) + \\
& + \frac{A_1 A_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{a2}) + \frac{A_1 B_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{a1} - \Phi_{b2}) + \\
& + \frac{A_2 A_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{a2} - \Phi_{a1}) + \frac{A_2 B_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{a2} - \Phi_{b1}) + \\
& + \frac{B_1 A_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{b1} - \Phi_{a2}) + \frac{B_1 B_2}{2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Phi_{b1} - \Phi_{b2}) + \\
& + \frac{B_2 A_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{b2} - \Phi_{a1}) + \frac{B_2 B_1}{2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_{b2} - \Phi_{b1})
\end{aligned} \tag{329}$$

A gyakorlatban ω_1 és ω_2 eltérése is általában olyan nagy, hogy detektoraink még a különbségi frekvenciás rezgést sem tudják lekövetni. Pl. a Fizeau 1862-es kísérletében alkalmazott nátrium D-vonal hullámhosszai 589,0 és 589,6 nm, aminél $\omega_1 - \omega_2 = 3,3 \cdot 10^{12}$ Hz. Tehát azt lehet mondani, hogy méréseink során minden időfüggő tag kiátlagolódik. Ez alól egymódusú lézerek lehetnek kivételek, ahol a frekvenciasávszélesség 1-10 MHz. Megfelelő sávszélességű detektorral ilyen esetekben kimutatható a fent leírt nagyfrekvenciás lebegés illetve moduláció. A (329) kifejezésből további átrendezés után ez marad:

$$\begin{aligned}
\langle (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = & \\
= & \left[\frac{A_1 A_1}{2} + \frac{B_1 B_1}{2} + A_1 B_1 \cos(\varphi_{a1} - \varphi_{b1}) \right] + \left[\frac{A_2 A_2}{2} + \frac{B_2 B_2}{2} + A_2 B_2 \cos(\varphi_{a2} - \varphi_{b2}) \right], \tag{330}
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a koszinusz páros függvény, emiatt az argumentuma anélkül szorozható -1-el, hogy az értéke megváltozna, és kifejtettük Φ -t. Itt most az egyszerűség kedvéért két teljesen azonos irányba haladó síkhullámot tekintünk, emiatt a helyfüggő tag kiesett, de általános esetben $\Phi(\mathbf{r})$ helyfüggő. Az eredmény értelmezése az, hogy „a” és „b”

hullám szuperponálásakor *csak az azonos körfrekvenciájú* (hullámhosszú) komponensek hoznak létre interferenciát, és az így kapott interferogrammok *intenzitása összegezhető*. Mivel azonos hullámhosszú, konstans kezdőfázisú fénysugárzásokat csak azonos forrásból származó fény kettéosztásával tudunk megvalósítani, feltételezhető, hogy az A és B amplitúdók arányosak egymással. Tehát az általánosság elvesztése nélkül írhatjuk, hogy:

$$B_1 = p \cdot A_1 ; B_2 = p \cdot A_2, \quad (331)$$

ahol „ p ” konstans arányossági tényező. Ezzel (330) így alakul:

$$\begin{aligned} \langle (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = \\ = A_1 A_1 \left[\frac{1}{2} + \frac{p^2}{2} + p \cos(\varphi_{a1} - \varphi_{b1}) \right] + A_2 A_2 \left[\frac{1}{2} + \frac{p^2}{2} + p \cos(\varphi_{a2} - \varphi_{b2}) \right] \end{aligned} \quad (332)$$

Az általánosságot némileg korlátozva tegyük fel, hogy a két interferáló fénynyaláb azonos amplitúdójú, azaz $p = 1$. Ezzel:

$$\langle (E_a(\mathbf{r}, t) + E_b(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = A_1 A_1 (1 + \cos(\varphi_{a1} - \varphi_{b1})) + A_2 A_2 (1 + \cos(\varphi_{a2} - \varphi_{b2})) \quad (333)$$

illetve az átlagintenzitások:

$$I_{a1} = I_{b1} = v\varepsilon \langle (A_1 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_{a1} \mathbf{r} + \varphi_{a1}))^2 \rangle = v\varepsilon \frac{A_1^2}{2} \triangleq I_1 \quad (334)$$

$$I_{a2} = I_{b2} = v\varepsilon \langle (A_2 \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_{a2} \mathbf{r} + \varphi_{a2}))^2 \rangle = v\varepsilon \frac{A_2^2}{2} \triangleq I_2 \quad (335)$$

Ezzel az eredő intenzitás:

$$I = 2I_1 (1 + \cos(\varphi_{a1} - \varphi_{b1})) + 2I_2 (1 + \cos(\varphi_{a2} - \varphi_{b2})). \quad (336)$$

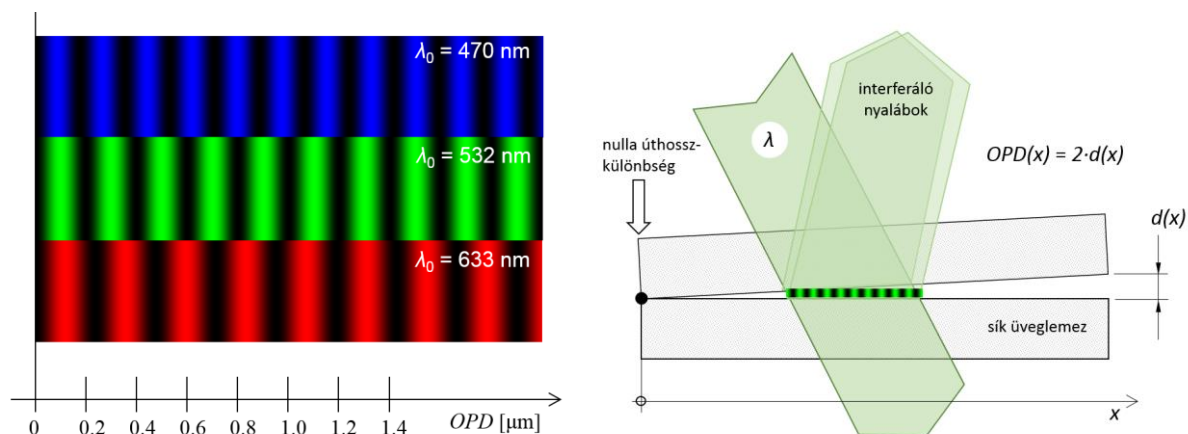
A fáziskülönbséget (mind hullámfront- mind amplitúdóosztó) interferométerekben fizikailag adott d úthosszkülönbséggel hozzuk létre. Ezzel az fáziskülönbség a következő alakba írható:

$$k = n \frac{\omega}{c} \Rightarrow \varphi_{a1} - \varphi_{b1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} d = \frac{\omega_1}{c} n d ; \quad \varphi_{a2} - \varphi_{b2} = \frac{2\pi}{\lambda_2} d = \frac{\omega_2}{c} n d, \quad (337)$$

ahol n a közeg törésmutatója (most feltételezzük, hogy ez nem hullámhosszfüggő, de a valóságban kismértékben az). A hullámhosszról azért érdemes áttérni körfrekvenciára, mert lineáris közegekben ω állandó. A (337) behelyettesítésével, és $OPD = nd$ bevezetésével (336)-ból ez lesz:

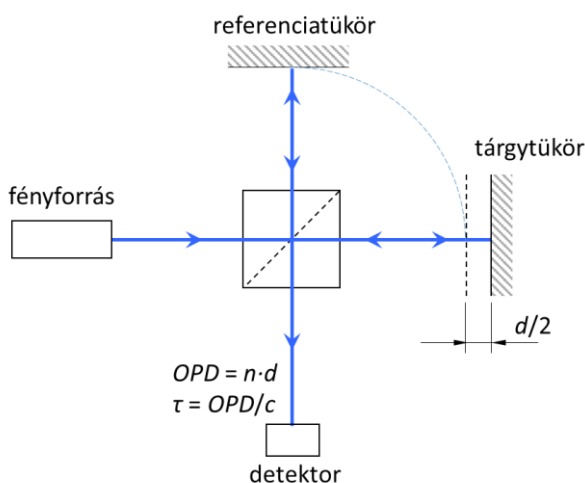
$$I(OPD) = 2I_1 \left(1 + \cos \left(\frac{\omega_1}{c} OPD \right) \right) + 2I_2 \left(1 + \cos \left(\frac{\omega_2}{c} OPD \right) \right). \quad (338)$$

A fenti összefüggés az interferogrammot két koszinuszfüggvény (elemi interferogram) összegeként írja le. Mivel mindkét komponensnek más a frekvenciája (periódusideje, hullámhossza), OPD növekedtével az elemi interferogrammok egymáshoz képest szétcsúsznak. Ezt szemlélteti az 57. ábra három eltérő hullámhosszra, Fizeau-interferométer felhasználásával. Az interferogram lebegése jól megfigyelhető pl. a kék-zöld hullámhosszak esetén: $OPD \approx 0,7 \mu\text{m}$ -nél a két interferogram ellenfázisban van (itt tűnik el az eredő interferencia), $1,5 \mu\text{m}$ -nél pedig azonos fázisba kerülnek (itt újra megjelenik). Végtelen számú hullámhossz összegzésekor az úthosszkülönbség emelkedésével az eredő interferogram láthatósága fokozatosan tart a nullához.



57. ábra. Fizeau-interferogrammok különböző hullámhosszú sugárzások esetén.

A (338) kifejezés segítségével a kétfrekvenciás esetről könnyen áttérhetünk tetszőleges számú komponenset tartalmazó frekvenciaspektrumú hullámok interferenciájára. A továbbiakban az interferogrammok, a gyakorlatnak megfelelően, Michelson- (vagy más néven Twyman-Green) interferométerben vizsgáljuk (58. ábra), mert abban az OPD folyamatos, kontrollált változtatása sokkal könnyebben és pontosabban megoldható. A vizsgált I intenzitás az 58. ábrán látható detektor által mért jellel (áram, feszültség) arányos.



58. ábra. Michelson (Twyman-Green) interferométer.

11.3. Kéthullámú interferencia több frekvenciát tartalmazó rezgés esetén

Ha „ N ” darab különböző hullámhosszúságú komponensből áll az „ a ” és „ b ” hullám, az előző gondolatok általánosításával az interferogram intenzitása az alábbi módon kapható meg:

$$I(OPD) = 2 \sum_{i=1}^N I_i \left(1 + \cos \left(\frac{\omega_i}{c} OPD \right) \right) \quad (339)$$

A fenti esetben az N db diszkrét körfrekvencia alkotja a fény *spektrumát*. Amennyiben a spektrum folytonos, az összegzésből integrálás lesz:

$$I(OPD) = 2 \int_0^{\infty} S(\nu) \cdot \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\nu}{c} \cdot OPD \right) \right) \cdot d\nu \quad ; \quad S(\nu) \triangleq \frac{dI(\nu)}{d\nu}, \quad (340)$$

ahol $S(\nu)$ egy új mennyiség, a spektrális sűrűségfüggvény. Folytonos üzemű fényforrásoknál a *spektrális teljesítménysűrűséget* használják, az energiára vonatkozó sűrűségfüggvényt pedig pl. impulzusoknál alkalmazzák. A fenti képletben körfrekvenciáról áttértünk frekvenciára ($\nu = \omega/2\pi$). Az „a” vagy a „b” interferáló nyaláb összintenzitása ezzel kifejezve:

$$I_0 = \int_0^{\infty} S(\nu) d\nu \quad (341)$$

Ha azt az időt amely alatt a fény *OPD*-nyi optikai úthosszat megtesz, τ -val jelöljük:

$$I(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\nu)(1 + \cos(2\pi\nu \cdot \tau)) d\nu \quad ; \quad \tau \triangleq \frac{OPD}{c} \quad (342)$$

A fenti kifejezéssel leírt intenzitás nem más, mint a τ függvényében felvett *interferogram*. Az összefüggés egy konstans és egy τ -függő tagot tartalmaz. Ezeket szétválasztva:

$$I(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\nu) d\nu + 2 \int_0^{\infty} S(\nu) \cos(2\pi\nu \cdot \tau) d\nu = 2I_0 \left(1 + \int_0^{\infty} \frac{S(\nu)}{I_0} \cos(2\pi\nu \cdot \tau) d\nu \right) \quad (343)$$

Bevezetve a *normált koherencia függvény* (más néven *koherenciafok*), $g(\tau)$ fogalmát (néhol γ -val jelölik), a fenti összefüggés általánosan így írható fel:

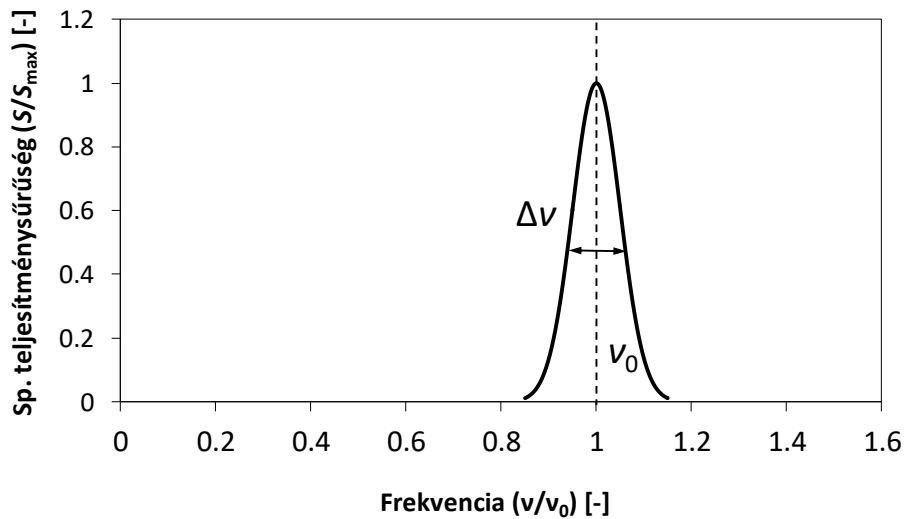
$$g(\tau) \triangleq \int_0^{\infty} \frac{S(\nu)}{I_0} \cos(2\pi\nu \cdot \tau) d\nu \quad \rightarrow \quad I(\tau) = 2I_0(1 + g(\tau)). \quad (344)$$

A 12. fejezetben azt fogjuk megnézni, hogy mit jelent a $g(\tau)$ függvény a gyakorlatban, hogyan lehet meghatározni egy konkrét spektrumból vagy a térerősség időbeli változásából, és mik a főbb jellemzői.

12. AZ IDŐBELI KOHERENCIA VIZSGÁLATA IDŐTARTOMÁNYBAN

12.1. Kvázimonokromatikus hullámok

A véges szélességű, folytonos teljesítményspektrumban véletlen kezdőfázissal rendelkező spektrális komponenseket tartalmazó rezgések időtartományban indeterminisztikus jelként viselkednek. Ilyen hullámokkal csak véges úthosszkülönbség esetén hozható létre interferencia. Az indeterminisztikus rezgések közül műszaki szempontból azok a legérdekesebbek, ahol az interferencia a hullámhossznál jóval nagyobb úthosszkülönbség esetén is még látható marad. Az ilyen sugárzások teljesítményspektrumára az a jellemző, hogy egy központi frekvenciát tartalmaz (ν_0), amelyhez képest a spektrum szélessége jellemzően kicsi: $\Delta\nu \ll \nu_0$. Az ilyen rezgéseket *kvázimonokromatikusnak* nevezzük.



59. ábra. Kvázimonokromatikus fényforrás teljesítményspektrumának szemléltetése.

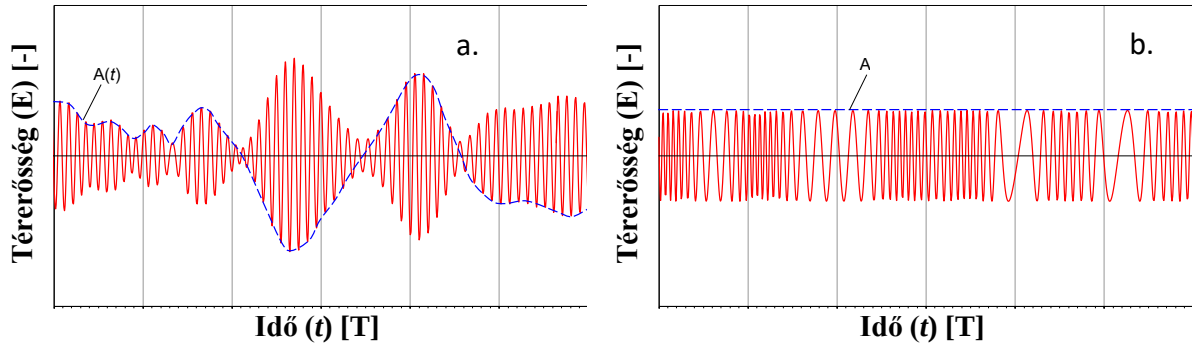
Elméletileg bármilyen jelalak időfüggése felírható a következő általános formulával:

$$E(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (345)$$

Kvázimonokromatikus esetben $\Delta\nu \ll \nu_0$, emiatt mind az amplitúdóra (A) mind pedig a fázisra (φ) jellemző, hogy időben jóval lassabban változnak, mint a körfrekvencia. Hasonlóan a geometriai optikánál vizsgált lassan változó amplitúdójú közelítés tárgyalásához, (345) idő szerinti deriválásából a következő adódik (T_0 a középfrekvenciához tartozó periódusidőt jelöli):

$$\left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right| \ll \omega_0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} T_0 \right| \ll 2\pi \quad \text{és} \quad \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \ll \omega_0 \Leftrightarrow \left| \frac{d\varphi}{dt} T_0 \right| \ll 2\pi \quad (346)$$

Az ilyen rezgések két tipikus fajtája látható a 60. ábrán. A bal oldali képen az ún. amplitúdómoduláció látható (ez felel meg a látható sugárzások többségének, mint pl. LED-ek, izzószálas és fluoreszcens források), a jobb oldalin pedig a frekvenciamoduláció, ami egymódusú lézereknél, FM-modulált rádióhullámoknál fordul elő. A továbbiakban csak az amplitúdómodulációval foglalkozunk.



Amplitúdómoduláció: $E(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$ Frekvenciamoduláció: $E(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$

60. ábra. Kaotikus, spontán emissziójú (termikus) (a) és indukált emissziójú fényforrás (b) elektromos térerőssége időfüggésének bemutatása.

A fénykibocsátási folyamat függvényében a teljesítményspektrum alakja többféle lehet, pl. Lorentz (élettartam v. ütközési kiszélesedés v. Fabry-Perot rezonátorok), vagy Gaussos (Doppler-kiszélesedés). A frekvencia- és a λ_0 középpontú hullámhosszspektrum szélessége közötti kapcsolat könnyen megkapható:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} ; \quad \Delta\lambda = \frac{d\lambda}{d\nu} \Delta\nu = \left[\frac{d\nu}{d\lambda} \right]^{-1} \Delta\nu \Rightarrow |\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{c} \Big|_{\lambda_0} \cdot \Delta\nu \Leftrightarrow \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right| = \left| \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \right| \quad (347)$$

Látható fényforrások: Gázlézer: $\Delta\lambda \sim 0,001 \text{ nm}$
 Szilárdtestlézer: $\Delta\lambda \sim 0,1 \text{ nm}$
 Félvezetőlézer: $\Delta\lambda \sim 1 \text{ nm}$ (+ hőmérsékleti ingadozás: $2 \text{ nm}/10^\circ\text{C}$)
 LED: $\Delta\lambda \sim 10 \text{ nm}$

12.2. Kvázimonokromatikus rezgés koherenciafüggvénye

A (344) definíció alapján érdemes bevezetni a komplex koherenciafüggvényt, mert ez jelentősen leegyszerűsíti a további összefüggések tárgyalását:

$$\tilde{g}(\tau) \triangleq \int_0^\infty \frac{S(\nu)}{I_0} \cos 2\pi\nu\tau d\nu + i \int_0^\infty \frac{S(\nu)}{I_0} \sin 2\pi\nu\tau d\nu = \int_0^\infty \frac{S(\nu)}{I_0} e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (348)$$

Az integrálási tartomány kiterjeszthető $-\infty$ -ig, mert egy kvázimonokromatikus fényhullám spektruma mindig egy adott frekvenciaintervallumra korlátozódik, amelynek alsó határa igen ritkán tart $\nu = 0 \text{ Hz}$ -ig:

$$\tilde{g}(\tau) = \int_0^\infty \frac{S(\nu)}{I_0} e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \approx \int_{-\infty}^\infty \frac{S(\nu)}{I_0} e^{i2\pi\nu\tau} d\nu \quad (349)$$

Ez az integrál pedig nem más mint az inverz Fourier-transzformáció képlete, vagyis:

$$\tilde{g}(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{S(\nu)}{I_0} \right\} \text{ ill. } g(\tau) = \text{Re}\{\tilde{g}(\tau)\} \quad (350)$$

Tehát a spektrális teljesítménysűrűség inverz Fourier-transzformáltja a normált koherencia függvény, ami viszont azt jelenti, hogy S/I_0 a $\tilde{g}(\tau)$ függvény Fourier-transzformáltja:

$$\frac{S(\nu)}{I_0} = \mathcal{F}\{\tilde{g}(\tau)\}. \quad (351)$$

Azaz a normalizált koherencia függvényből a spektrális teljesítménysűrűség Fourier-transzformációval előállítható, és vice versa. Erre jött rá Michelson is, és ez az alapja a mai interferencia spektroszkópiának (FTIR), ahol egy interferométerrel megméri a $g(\tau)$ koherenciafüggvényt és a spektrumot ennek Fourier-transzformáltjaként számítják ki. A Fourier-transzformáció tulajdonságaiból az is következik, hogy mivel $S(\nu)$ valós függvény, $\tilde{g}(\tau)$ hermitikus kell legyen, azaz

$$\tilde{g}(-\tau) = \tilde{g}^*(\tau) \Rightarrow g(-\tau) = \text{Re}\{\tilde{g}^*(\tau)\} = g(\tau), \quad (352)$$

vagyis a normált koherenciafüggvény páros, azaz mindig szimmetrikus a $\tau = 0$ időkülönbségre. További tulajdonsága abból következik, hogy a (349) összefüggés $\tau = 0$ -ra nem más mint az I_0 -al normált összintenzitás, ami (341) alapján mindig 1-et eredményez. Vagyis:

$$\tilde{g}(0) = g(0) = 1. \quad (353)$$

Most egy konkrét esetet nézünk meg. Vizsgáljunk egy ν_0 középfrekvenciájú, $\Delta\nu$ sávszélességű kvázimonokromatikus hullámot ($\Delta\nu \ll \nu_0$), és tekintsük a teljesítményspektrumot Gauss-eloszlásúnak:

$$S(\nu) := \frac{I_0\sqrt{2}}{\Delta\nu_2\sqrt{\pi}} e^{-2\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_2}\right)^2}; \quad \Delta\nu \triangleq 2\Delta\nu_2 \quad (354)$$

A függvény normáló tényezőjét úgy választottuk meg, hogy az összintenzitás (341)-nek megfelelően I_0 legyen. (351) alapján a normált koherenciafüggvény:

$$\tilde{g}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{\Delta\nu_2\sqrt{\pi}} e^{-2\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_2}\right)^2}\right\} \quad (355)$$

A Gauss-függvény inverz Fourier-transzformáltja a következő (ld. Wolfram Mathworld és [14]):

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_2}\right)^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \Delta\nu_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(\pi\Delta\nu_2\tau)^2} \cdot e^{-i2\pi\nu_0\tau} \quad (356)$$

Ennek segítségével (355) analitikusan kiértékelhető, s így megkapjuk a koherenciafüggvényt:

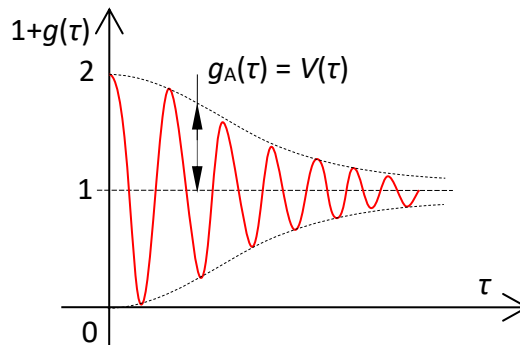
$$\tilde{g}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}(\pi\Delta\nu_2\tau)^2} \cdot e^{-i2\pi\nu_0\tau} = g_A(\tau) \cdot e^{-i2\pi\nu_0\tau} \quad (357)$$

$$g(\tau) = \text{Re}\{\tilde{g}(\tau)\} = g_A(\tau) \cdot \cos 2\pi\nu_0\tau = e^{-\frac{1}{2}(\pi\Delta\nu_2\tau)^2} \cdot \cos 2\pi\nu_0\tau, \quad (358)$$

ahol $g_A(\tau)$ szintén Gauss-függvény alakú. Az interferogram (344) alapján:

$$I(\tau) = 2I_0(1 + g(\tau)) = 2I_0(1 + g_A(\tau) \cdot \cos 2\pi\nu_0\tau), \quad (359)$$

melynek alakját az alábbi ábra szemlélteti.



61. ábra. Normált koherenciafüggvény szemléltetése, és megjelenése az interferogrammon.

A (359) egyenletet a kéthullámú interferenciánál fölírt

$$I(\delta) = 2I_0(1 + \cos(\delta)) \quad (360)$$

képlettel összevetve olyan interferenciát kaptunk, ahol az eredő intenzitás a késleltetési idővel, τ -val periodikusan változik, a normált koherenciafüggvény amplitudója pedig az interferenciacsíkok lokális láthatóságaként értelmezhető:

$$V(\tau) = \frac{I_{\max}(\tau) - I_{\min}(\tau)}{I_{\max}(\tau) + I_{\min}(\tau)} = \frac{2I_0(1 + g_A(\tau)) - 2I_0(1 - g_A(\tau))}{2I_0(1 + g_A(\tau)) + 2I_0(1 - g_A(\tau))} = \frac{2g_A(\tau)}{2} = g_A(\tau). \quad (361)$$

A (358) összefüggés jól alátámasztja és magyarázza Fizeau és Michelson megfigyeléseit: növekvő úthossz- (idő-) különbség esetén a polikromatikus fénynyalábok interferenciája romló láthatóságot mutat. Azt az időtartamot, ahol a láthatóság egy előre meghatározott érték alá csökken (definíció szerint pl. felére, $1/e$ -ed vagy $1/e^2$ -ed részére) *koherenciaidőnek* (τ_c) nevezzük. Ismert $g_A(\tau)$ alapján könnyen meghatározhatjuk a τ_c koherenciaidőt, csak meg kell oldjuk az alábbi egyenletet:

$$g_A(\tau_c) = \frac{1}{2} \text{ vagy } \frac{1}{e} \text{ vagy } \frac{1}{e^2} \text{ stb.} \quad (362)$$

Esetünkben, ha $g_A(\tau_c) = e^{-2}$, akkor (358)-ból a következő koherenciaidő határozható meg:

$$\tau_c = \frac{2}{\pi\Delta\nu_2} = \frac{4}{\pi\Delta\nu} \Leftrightarrow \tau_c\Delta\nu = \frac{4}{\pi}. \quad (363)$$

12.3. Időben statisztikus viselkedés leírása az autokorrelációs fgv. segítségével

Ahogy a kvázimonokromatikus esetről láttuk, a véges szélességű spektrummal rendelkező hullámok időfüggése véletlenszerű, inderterminisztikus jelleget mutat. Vegyünk tehát két kiterjedt spektrummal rendelkező hullámot („a” és „b”), melyek jelen esetben tehát *nem harmonikusak*, és vizsgáljuk ezek interferenciáját *időtartományban*. A jobb érthetőség kedvéért itt sem használjuk a komplex jelölésmódot, bár a levezetés úgy is elvégezhető. Időbeli vizsgálatot végzünk a tér adott pontjában, tehát a helyfüggést most nem jelöljük. A tetszőleges T időre átlagolt intenzitás ekkor (321) alapján a következő:

$$I(T) = v\varepsilon \langle (E_a(t) + E_b(t))^2 \rangle = v\varepsilon \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (E_a(t) + E_b(t))^2 dt \quad (364)$$

Tegyük fel továbbá, hogy az időátlag független az átlagolás T időtartamától, magyarul

$$I(T) = I(T \rightarrow \infty) = \text{const.} \triangleq I, \quad (365)$$

és ez igaz E_a és E_b átlagolásakor is. Az ilyen nyalábokat *statisztikusan stacionáriusnak* nevezzük. A két nyaláb ne legyen független, hanem E_b -t úgy állítsuk elő, hogy E_a -t τ idővel késleltetjük:

$$E_b(t) := E_a(t - \tau) \quad (366)$$

A négyzetre emelést kibontva az eredő intenzitás:

$$I(\tau) = v\varepsilon \langle (E_a(t) + E_a(t - \tau))^2 \rangle = v\varepsilon \langle E_a^2(t) + E_a^2(t - \tau) + 2E_a(t)E_a(t - \tau) \rangle \quad (367)$$

Mivel a nyalábok statisztikusan stacionáriusak, az időátlagképzés független a τ -nyi eltolástól:

$$I(\tau) = 2I_0 + 2v\varepsilon \cdot \langle E_a(t) \cdot E_a(t - \tau) \rangle = 2I_0 \left[1 + \frac{\langle E_a(t) \cdot E_a(t - \tau) \rangle}{\langle E_a(t)^2 \rangle} \right], \quad (368)$$

ahol $I_0 = v\varepsilon \langle E_a^2(t) \rangle$, az E_a nyaláb intenzitása $T \rightarrow \infty$ esetén. Érdekes a fenti egyenletet összevetni (344)-el, amely pont ugyanilyen alakú, vagyis a normált koherenciafüggvény $g(\tau)$ nem más mint $E_a(t)$ normált autokorrelációs függvénye:

$$g(\tau) = \frac{\langle E_a(t) \cdot E_a(t - \tau) \rangle}{\langle E_a(t)^2 \rangle}. \quad (369)$$

Tegyük most fel, hogy E_a egy olyan ω_0 körfrekvenciájú rezgés, amelynek $A(t)$ a periódusidőhöz képest lassan változik az időben, tehát a rezgés kvázimonokromatikus:

$$E(t) = A(t) \cos(\omega_0 t) \quad (370)$$

Mivel a két hullámot azonos forrásból indítottuk, a kezdőfázis a későbbi számolások során ki fog esni, ezért fel sem tüntettük. A rezgés átlagintenzitása $T \rightarrow \infty$ esetére a következő:

$$I_0 = v\varepsilon \langle A(t)^2 \cos^2(\omega_0 t) \rangle \approx v\varepsilon \langle A(t)^2 \rangle \langle \cos^2(\omega_0 t) \rangle. \quad (371)$$

A közelítés azért jogos, mert $A(t)$ lassan változik $\cos(\omega_0 t)$ -hez képest. Ezzel az intenzitás:

$$I_0 = v\varepsilon \langle E_a^2(t) \rangle = \frac{v\varepsilon}{2} \langle A(t)^2 \rangle, \quad (372)$$

amire később lesz szükségünk. A kvázimonokromatikus E_a térerősséget beírva (368)-ba:

$$I(\tau) = 2I_0 + 2v\varepsilon \langle A(t)A(t - \tau) \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau) \rangle \quad (373)$$

A fenti összefüggés (326) alapján átírható ebbe az alakba:

$$\begin{aligned} I(\tau) &= 2I_0 + v\varepsilon \langle A(t)A(t - \tau) (\cos(2\omega_0 t - \omega_0 \tau) + \cos(\omega_0 \tau)) \rangle = \\ &= 2I_0 + v\varepsilon \langle A(t)A(t - \tau) \cos(2\omega_0 t - \omega_0 \tau) \rangle + v\varepsilon \langle A(t)A(t - \tau) \cos(\omega_0 \tau) \rangle \end{aligned} \quad (374)$$

Mivel feltevésünk szerint $A(t)$ lassan változik ω_0 -körfrekvenciájú rezgéshez képest, így csak a $2\omega_0$ -s tag átlagolódik ki. Az időátlagolásból $\cos(\omega_0 \tau)$ -t kiemelve kapjuk a következő eredményt:

$$I(\tau) = 2I_0 + v\varepsilon \langle A(t)A(t - \tau) \rangle \cdot \cos(\omega_0 \tau). \quad (375)$$

A fenti képlet tovább alakítható:

$$I(\tau) = 2I_0 [1 + g_A(\tau) \cdot \cos(\omega_0 \tau)]. \quad (376)$$

Ezt (344)-el ill. (368)-el összevetve megkapjuk a normált koherenciafüggvényt:

$$g(\tau) = g_A(\tau) \cdot \cos(\omega_0 \tau) \quad \text{és} \quad g_A(\tau) \triangleq \frac{v\varepsilon \langle A(t)A(t - \tau) \rangle}{2I_0} = \frac{\langle A(t)A(t - \tau) \rangle}{\langle A(t)^2 \rangle}. \quad (377)$$

A $g_A(\tau)$ függvény a $g(\tau)$ a normált koherenciafüggvény amplitúdója, maximális értékét $\tau = 0$ -nál veszi fel, ahol a számláló értéke éppen I_0 -t adja vissza, ld. (372): $g(0) = 1$, ahogy vártuk. Emellett az autokorrelációs függvény mindig páros, ami szintén összhangban van a frekvenciatérben végzett analízis eredményével. A fenti képletből az is kiderül, hogy amennyiben $A(t)$ sztohasztikusan változik, akkor $g(\tau \rightarrow \infty) = 0$.

A spektrális teljesítménysűrűség és az autokorrelációs függvény kapcsolatát általános esetben a jelfeldolgozás Wiener-Khinchin-tétele írja le:

$$\mathcal{F}^{-1} \{ |\mathcal{F}\{\tilde{E}_a\}|^2 \} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_a(t) \tilde{E}_a^*(t - \tau) dt \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{S(\nu)\} = I_0 \cdot \tilde{g}(\tau), \quad (378)$$

ahol:

$$\tilde{E}_a(t) = A(t)e^{i\omega_0 t} ; \quad \tilde{g}(\tau) = \frac{\langle \tilde{E}_a(t)\tilde{E}_a^*(t-\tau) \rangle}{\langle \tilde{E}_a(t)\tilde{E}_a^*(t) \rangle} = g_A(\tau) \cdot e^{i\omega_0 \tau} . \quad (379)$$

A spektrális teljesítménysűrűséget pedig a Parseval-tétel alapján értelmezhetjük. Ez kimondja, hogy a Fourier-transzformáció unitér tulajdonságú, azaz az időtartománybeli jel *összenergiája* megegyezik a frekvenciaspektrum összenergiájával:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{\tilde{E}_a\}|^2 d\nu \quad (380)$$

Ebből *átlagteljesítmény* így lesz:

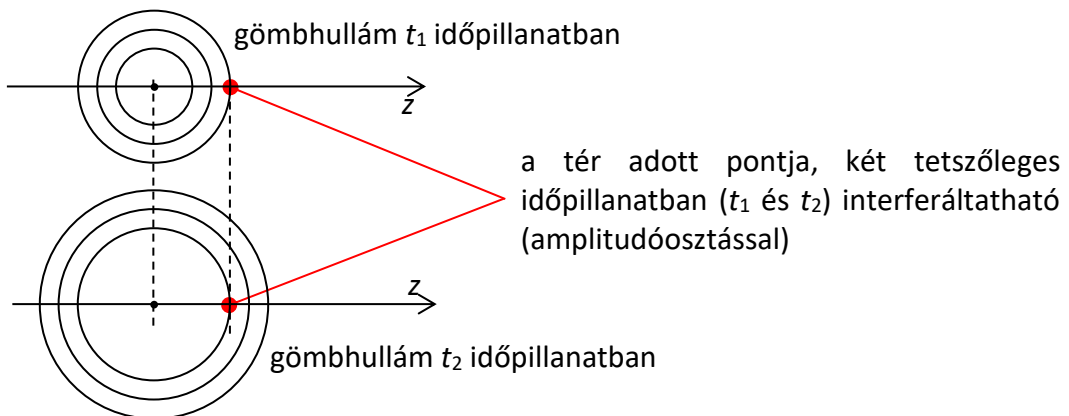
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \frac{v\varepsilon}{2} \int_{-T}^T |\tilde{E}_a(t)|^2 dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \frac{v\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}\{\tilde{E}_a\}|_T^2 d\nu \right], \quad (381)$$

ahol a jobb oldalon a teljesítményspektrum integrálja látható. Tehát a spektrális teljesítménysűrűség:

$$S(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{v\varepsilon}{2T} |\mathcal{F}\{\tilde{E}_a\}|_T^2 \right]. \quad (382)$$

12.4. A koherencia fogalma, fajtái

Összefoglalásul megállapíthatjuk, hogy a koherencia egy adott sugárzásra jellemző tulajdonság, hasonlóan a hullámhosszhoz vagy az intenzitáshoz. Csökkenése minden esetben azzal van kapcsolatban, hogy a vizsgált rezgés az idő függvényében bizonytalanságokat mutat, és azzal lehet jellemezni, hogy két adott távolságra lévő időpillanatban mennyire állandó a fáziskülönbség. Három fajtáját különböztetik meg a koherenciának: időbeli/térbeli/polarizációs. Az utóbbi azt jelenti, hogy a fény polarizációs állapota ingadozik az idő vagy a hely függvényében, de ezzel az esettel itt nem foglalkozunk. Legfontosabb az időbeli koherencia, amit úgy kell elképzelni, mintha a sugárzás fázisállapotát egy adott térbeli pontban vizsgálnánk, de különböző időpillanatokban, ld. 62. ábra. Ilyen eszközök az amplitúdóosztó interferométerek (pl. Michelson). Amint a korábbiakban kiderült, az időbeli koherencia mértéke a fényforrás frekvenciaspektrumának szélességétől függ.



62. ábra. Időbeli koherencia szemléltetése.

Időbeli koherencia (longitudinális) koherenciahossza:

$$l_L \triangleq v \cdot \tau_c \quad (383)$$

Pl.: $\lambda = 633 \text{ nm}$; $\Delta\lambda = 0,001 \text{ nm}$; $\Delta\nu = 0,75 \text{ GHz}$ (longitudinális rezonátormódusok távolsága, három módus); $l_L \approx 250 \text{ mm}$; $\tau_c \approx 0,85 \text{ nsec}$ (kb. 400000 periódus) a (363) egyenlet alapján.

Emiatt van, hogy két független lézerforrást szuperponálva nem látunk állóhullámképet: interferencia ugyan itt is kialakul, de kb. 1 nsec-onként megváltozik a kép, aminek mi csak az átlagát vagyunk képesek érzékelni.

A térbeli koherencia hullámfrontosztó interferométerekkel vizsgálható (ld. pl. Young-féle kétréses kísérlet). Ebben az esetben a tér két különböző pontjából jövő fényt interferáltatjuk, azonos időpillanatban. A *transzverzális koherenciahossz* az a távolság, ahol az interferencia láthatósága egy adott érték alá csökken:

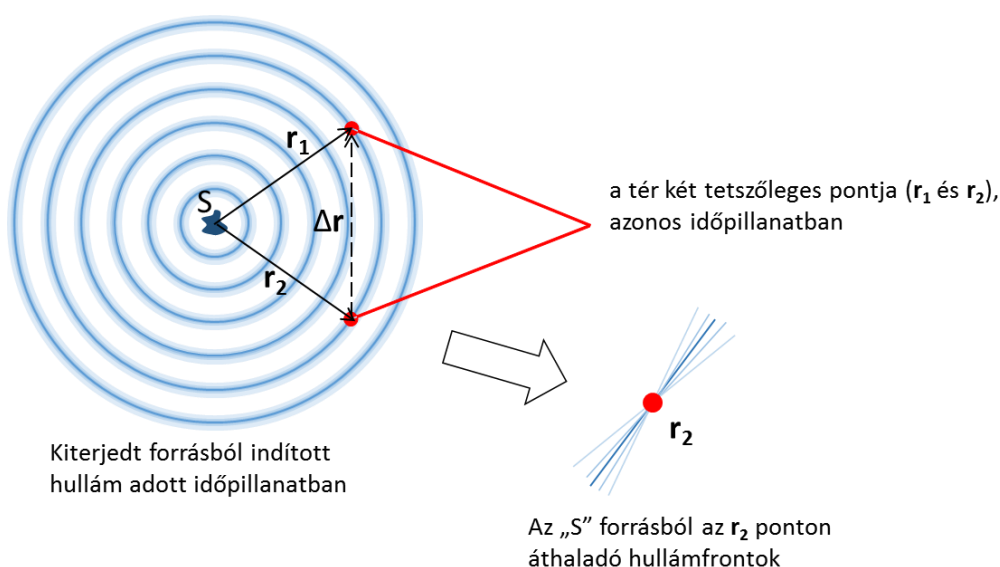
$$l_T \triangleq |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \quad (384)$$

A frekvenciaspektrum analógiájára a térbeli koherencia az ún. *szögspektrummal* van kapcsolatban, ami azt mutatja meg, hogy milyen térszögtartományba eső irányú síkhullámkomponensek szuperponálásával kapható meg az adott sugárzás. Ha a szögtartomány értéke Θ , azaz a fényforrás Θ szög alatt látszik abból a pontból nézve, ahol a koherenciát vizsgáljuk, akkor

$$l_T \approx \frac{\lambda}{\Theta} ; [\Theta] = \text{rad}. \quad (385)$$

A fenti közelítő képlet felírásánál hasonlóan jártunk el mint az interferenciajelenségek tárgyalásánál egyszerű módon kapott (215)-es képletnél: a térbeli koherenciát vizsgáló Young-féle réspár egyik tagján fázisban lévő hullámfrontok között éppen λ úthosszkülönbséget követelünk meg a réspár másik tagján mérve (ld. 63. ábra). A képletből jól látható, hogy a térbeli koherencia nem egy abszolút jellemző. Mivel a fényforrás látószöge csökken a tőle mért távolsággal, emiatt minél messzebb távolodunk el egy forrástól, az EM hullám térben annál koherensebb lesz. A pontos formulát az Optika és fotonika MSc specializáció hallgatói laborjának Diffrakciós fázisrács vizsgálata c. mérésben fogjuk levezetni.

A térbeli koherenciánál is fontos a véges frekvencia-sávszélesség: teljesen monokromatikus, de véletlen kezdőfázisú síkhullámok eredője ugyanis egy időben állandó szemcsekép (speckle). A térbeli koherenciával itt most részletesebben nem foglalkozunk.



63. ábra. Térbeli koherencia szemléltetése.

13. POLARIZÁCIÓ

Források: [1], [6], [12]

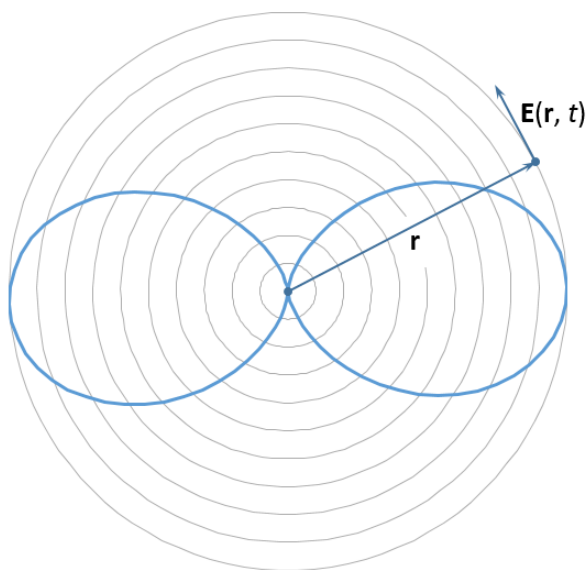
Polarizáció szerepe a fény-anyag kölcsönhatásban

Olyan EM hullámot nevezünk polarizáltnak, amelyben a térerősségvektorok *iránya* térben és időben periodikus rezgést végez. A legfontosabb példák, amelyekben a polarizáció érintett:

- reflexió két anyag határfelületéről polarizációfüggő (ld. pl. Brewster-effektus)
- bizonyos anyagok abszorpciója polarizációfüggő (dikroizmus)
- fény szóródása anyagról polarizáció-érzékeny (ld. Rayleigh-szórás)
- anizotróp anyag törésmutatója polarizációfüggő (pl. kettőtörés)
- optikailag aktív anyagok a polarizációt forgatják (királis molekulaszervezet, pl. cukor)

13.1. A fény polarizációs természete

Az önmagukban álló atomok a dipólsugárzásnak megfelelő iránykarakterisztikájú, a távolságban gömbi hullámfrontokkal rendelkező, adott frekvenciájú EM sugárzást bocsátanak ki amikor egy elektron magasabb energiaállapotból egy alacsonyabbra tér vissza (relaxáció), ld. 64. ábra. Az ilyen hullámra az jellemző, hogy az $\mathbf{E}$ térerősségvektor a tér bármely pontjában egy egyenes mentén rezeg, azaz iránya időben állandó.

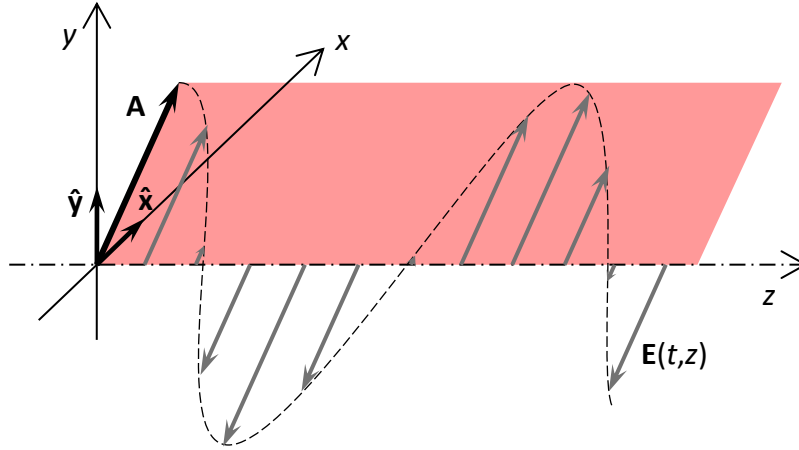


64. ábra. Dipólsugárzó távoltere a hullámfrontok, a polarizáció és az intenzitás-iránykarakterisztika feltüntetésével.

Ha egy adott terjedési irányt vizsgálunk, ez a rezgés végig *egy síkban marad*, mint a 65. ábrán. Az ilyen sugárzást *lineárisan polarizáltnak* nevezzük, a fény tehát keletkezési módjából kifolyólag természetszerűen polarizált. Példaképpen tekintsük a z -tengely irányába haladó harmonikus síkhullám térerősségvektorát:

$$\tilde{\mathbf{E}}(t, z) = \mathbf{A} \cdot e^{i(\omega t - kz + \varphi)} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}(t, z) = \tilde{\mathbf{A}} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \rightarrow \mathbf{E}(t, z) = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{A}} \cdot e^{i(\omega t - kz)}\} \quad (386)$$

A polarizációs jelenségek leírásánál szokásos módon a komplex vektoramplitudót $\tilde{\mathbf{A}}$ -val jelöltük.



65. ábra. Lineárisan polarizált EM hullám szemléltetése.

A fentiek szerint tehát minden lehetséges EM hullám lineárisan polarizált sugárzások összegéből áll elő. Továbbá könnyen belátható, hogy bármilyen irányú lineáris polarizáció felbontható két egymásra merőlegesen polarizált sugárzás szuperpozíciójaként, ezért bármilyen hullám felbontható két egymásra merőlegesen polarizált nyalábra. Síkhullám esetére nézzük meg, hogy ezek milyen polarizációs állapotokat eredményezhetnek.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_x(t, z) &= \tilde{\mathbf{A}}_x \cdot e^{i(\omega t - kz)} \\ \tilde{\mathbf{E}}_y(t, z) &= \tilde{\mathbf{A}}_y \cdot e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}(t, z) = \tilde{\mathbf{A}}_x \cdot e^{i(\omega t - kz)} + \tilde{\mathbf{A}}_y \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad (387)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(t, z) = \tilde{A}_x \cdot \hat{\mathbf{x}} \cdot e^{i(\omega t - kz)} + \tilde{A}_y \cdot \hat{\mathbf{y}} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad (388)$$

Most határozzuk meg, hogy milyen görbét ír le a térerősségvektor csúcsa (E_x, E_y) a z -pozícióban lévő x - y síkban, az idő függvényében.

$$\begin{aligned} E_x &= \text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}_x(t, z)\} = |\mathbf{A}_x| \cos(\omega t - kz + \varphi_x) = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y &= \text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}_y(t, z)\} = |\mathbf{A}_y| \cos(\omega t - kz + \varphi_y) = A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{aligned} \quad (389)$$

$$\Phi \triangleq \omega t - kz + \varphi_x \quad \text{és} \quad \Delta\varphi \triangleq \varphi_y - \varphi_x \quad (390)$$

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\Phi) \\ E_y &= A_y \cos(\Phi + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (391)$$

A cél az, hogy felírjuk E_x, E_y kapcsolatát az A_x, A_y és $\Delta\varphi$ paraméterekkel, aminek az érdekében kiejtjük az egyenletekből a Φ fázisszöget. (391) második egyenletéből ez lesz:

$$E_y = A_y (\cos(\Phi) \cos(\Delta\varphi) - \sin(\Phi) \sin(\Delta\varphi)) \quad (392)$$

$$\sin(\Phi) = \frac{\cos(\Phi) \cos(\Delta\varphi)}{\sin(\Delta\varphi)} - \frac{E_y}{A_y} \frac{1}{\sin(\Delta\varphi)} \quad (393)$$

$$\sin^2(\Phi) = \left(\frac{\cos(\Phi) \cos(\Delta\varphi)}{\sin(\Delta\varphi)} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y} \frac{1}{\sin(\Delta\varphi)} \right)^2 - 2 \frac{E_y \cos(\Phi) \cos(\Delta\varphi)}{A_y \sin^2(\Delta\varphi)} \quad (394)$$

(391) első egyenletéből pedig ez következik:

$$\frac{E_x}{A_x} = \cos(\Phi) \quad \text{és} \quad \left(\frac{E_x}{A_x} \right)^2 = \cos^2(\Phi) \quad (395)$$

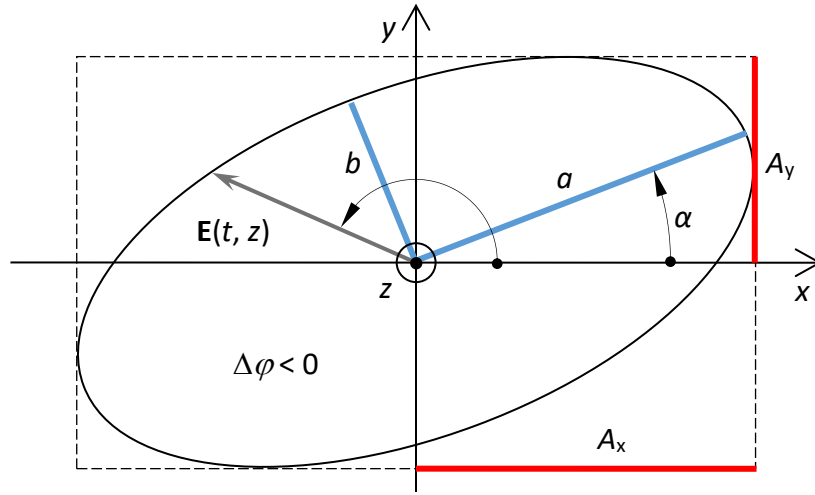
$$1 - \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 = \left(\frac{E_x \cos(\Delta\varphi)}{A_x \sin(\Delta\varphi)}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y \sin(\Delta\varphi)}\right)^2 - 2 \frac{E_y E_x \cos(\Delta\varphi)}{A_y A_x \sin^2(\Delta\varphi)} \quad (396)$$

$$1 - \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 \equiv 1 - \left(\frac{E_x \sin(\Delta\varphi)}{A_x \sin(\Delta\varphi)}\right)^2 \quad (397)$$

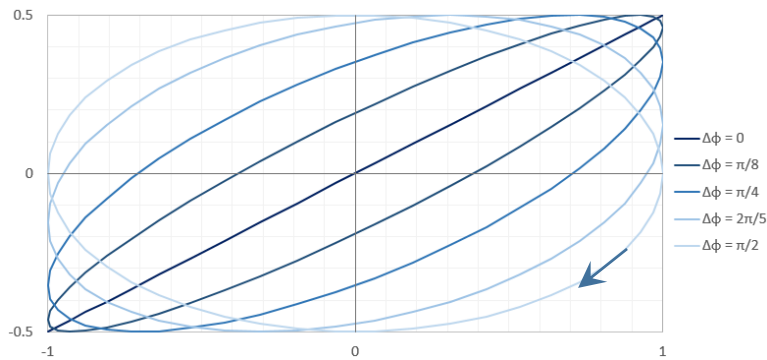
$$1 = \left(\frac{E_x}{A_x \sin(\Delta\varphi)}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y \sin(\Delta\varphi)}\right)^2 - 2 \frac{E_y E_x \cos(\Delta\varphi)}{A_y A_x \sin^2(\Delta\varphi)} \quad (398)$$

$$\sin^2(\Delta\varphi) = \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2 \cos(\Delta\varphi) \frac{E_x E_y}{A_x A_y}. \quad (399)$$

(399) az ellipszis általános képlete, melynek jól ismert alakját kapjuk, ha $\Delta\varphi = \pm 90^\circ$. Tehát két, z-irányban haladó, egymásra merőlegesen polarizált síkhullám szuperpozíciója általános esetben azt eredményezi, hogy a térerősségvektor ellipszis mentén mozog, ld. 66-67. ábrák.

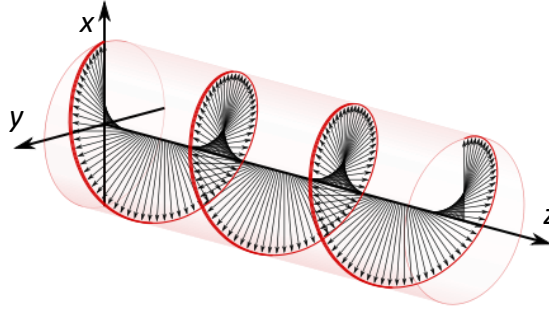


66. ábra. Elliptikusan polarizált hullám leírására használt jelölések.
A fény a megfigyelővel szembe terjed („fizikusi” megközelítés).



67. ábra. Különböző polarizációk szemléltetése (vegyük észre, hogy $A_x \neq A_y$). Ha A_x és $A_y \neq 0$ valamint $\Delta\varphi = 0$ v. π akkor lineárisan polarizált a fény. Amikor $\Delta\varphi < 0$ a térerősségvektor balra forog ; $\Delta\varphi > 0$ jobbra forog (ha velünk szembe terjed a fény). Ha $A_x = A_y$ és $\Delta\varphi = \pm\pi/2$, akkor cirkulárisan polarizált nyálábot kapunk.

A polarizáció irányát az határozza meg a konvenció szerint, hogy a térerősség csavarvonala jobb vagy balmenetes: LCP (balmenetes, szemből nézve balra forog), RCP (jobbmenetes, szemből nézve jobbra forog, ld. 68. ábra).



68. ábra. Jobbra cirkulárisan polarizált hullám szemléltetése (RCP), wikipedia.

Az ellipszis nagy és kistengelye (a és b) a következőképpen számítható ki [15]:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2} \left(A_x^2 + A_y^2 + \sqrt{(A_x^2 - A_y^2)^2 + 4 \cos^2(\Delta\varphi) A_x^2 A_y^2} \right) \\ b^2 &= \frac{1}{2} \left(A_x^2 + A_y^2 - \sqrt{(A_x^2 - A_y^2)^2 + 4 \cos^2(\Delta\varphi) A_x^2 A_y^2} \right). \end{aligned} \quad (400)$$

Ebből viszonylag könnyen belátható, hogy:

$$a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad (401)$$

Mivel nem teljesen triviális, most nézzük meg, hogy hogyan határozható meg általános esetben egy elliptikusan polarizált síkhullám intenzitása. Tegyük fel, hogy a vizsgált hullám két egymásra merőleges $\mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t)$ és $\mathbf{E}_y(\mathbf{r}, t)$ térerősségvektorú, azonos irányba terjedő síkhullám szuperpozíciójaként áll elő. Ebben az esetben az eredő Poynting-vektor a következő:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_y(\mathbf{r}, t)) \times (\mathbf{H}_x(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_y(\mathbf{r}, t)), \quad (402)$$

ahol $\mathbf{E}_x$ -hez az erre merőleges $\mathbf{H}_x$ tartozik, hasonlóan $\mathbf{E}_y$ és $\mathbf{H}_y$ esetén. A vektoriális szorzatot kifejtve kapunk olyan tagokat, hogy $\mathbf{E}_x \times \mathbf{H}_y$ és $\mathbf{E}_y \times \mathbf{H}_x$. Ezek mindegyike zérus, hisz a vektoriálisan összeszorozott vektorok párhuzamosak. Tehát az eredmény a két Poynting-vektor összege:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_x(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_y(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_y(\mathbf{r}, t) \quad (403)$$

Mivel ezek azonos irányba mutatnak, az intenzitások összegezhethők:

$$I = I_x + I_y. \quad (404)$$

Vagyis a fentebb bevezetett jelölésekkel:

$$I = v\varepsilon \frac{a^2 + b^2}{2} = v\varepsilon \frac{A_x^2 + A_y^2}{2} \text{ avagy } I = v\varepsilon \frac{\tilde{A}_x \tilde{A}_x^* + \tilde{A}_y \tilde{A}_y^*}{2}. \quad (405)$$

13.2. Jones-vektoros reprezentáció

A polarizált hullámok két összetevő komponensének komplex amplitudóját az úgynevezett Jones-vektorba szokták összefogni. Általában az x - és y -irányú lineárisan polarizált rezgést használják bázisként:

$$\mathbf{J} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \end{bmatrix} \quad (406)$$

A nyaláb intenzitása (405) alapján:

$$I = \frac{v\varepsilon}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* \quad (407)$$

Néhány példa, ha (391)-nek megfelelő fáziskonvenciót használunk, tehát $\tilde{A}_x$ fázisa a referencia, valamint az intenzitás az alábbiaknak megfelelően van normálva:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* = 1 \quad (408)$$

Lineárisan polarizált fény:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (409)$$

Balra cirkulárisan polarizált fény:

$$\mathbf{J}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad (410)$$

Jobbra cirkulárisan polarizált fény:

$$\mathbf{J}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \end{bmatrix} \quad (411)$$

Két polarizációt akkor tekintenek ortogonálisnak, ha a skaláris szorzatuk nulla:

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* = \tilde{A}_{1x}\tilde{A}_{2x}^* + \tilde{A}_{1y}\tilde{A}_{2y}^* = 0, \quad (412)$$

pl. azonos amplitudójú merőlegesen álló lineárisan polarizált nyalábok vagy azonos amplitudójú balra és jobbra cirkulárisan polarizált nyalábok. Az ortogonális Jones-vektorok jól használhatók új polarizációs bázisként. Bármely elliptikusan polarizált nyaláb a következőképpen írható fel két ortogonális polarizációjú nyaláb lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}' = c_1 \mathbf{J}_1 + c_2 \mathbf{J}_2 \quad (413)$$

ahol:

$$c_1 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_1^* \quad \text{és} \quad c_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_2^* \quad (414)$$

valamint $\mathbf{J}_{1,2}$ abszolút értéke az alábbi értelemben normalizált:

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_1^* = 1 \quad \text{és} \quad \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{J}_2^* = 1 \quad (415)$$

Tehát egy balra és egy jobbra cirkulárisan polarizált nyalábbal is felírható tetszőleges polarizáció. Pl. x-irányban lineárisan polarizált nyalábra:

$$c_1 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_L^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad c_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_R^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (416)$$

azaz:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{J}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{J}_L + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{J}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (417)$$

Cirkuláris bázisos felírásmódot tipikusan optikailag aktív közegek tárgyalásánál használnak, lineáris bázist pl. a Fresnel-reflexióknál.

13.3. Anizotróp optikai elemek leírása Jones-mátrixokkal

$$\mathbf{J}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \quad (418)$$

Pl. x-irányú lineáris polárszűrő (konstans fázistolás feltüntetése nélkül):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (419)$$

Pl. $\lambda/4$ -es fáziskésleltető lemez (x-y irányú főtengelyekkel):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{bmatrix} \quad (420)$$

Pl. $\lambda/2$ -es fáziskésleltető lemez (x-y irányú főtengelyekkel):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (421)$$

Forgatás mátrixa (koordináta-transzformáció β szöggel történő elforgatás esetén):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (422)$$

Amennyiben a vizsgált optikai rendszer nem tartalmaz veszteséget (abszorpció, szórás, Fresnel-reflexió formájában), azaz a transzmittancia egységnyi, akkor a polarizáció-transzformáció eredményeképpen a kilépő hullám teljesítménye ugyanakkora mint a belépőjé. Emiatt a Jones-mátrix *unitér* tulajdonságú, ami matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy a Jones-mátrix adjungáltja megegyezik az inverzával:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^+ = \mathbf{1} ; \mathbf{T}^+ \triangleq \mathbf{T}^{T*} \quad (423)$$

Ez a Jones mátrix összesen nyolc darab komplex paraméterére ad három független egyenletet:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (424)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{11}T_{11}^* + T_{12}T_{12}^* &= 1 \\ T_{11}T_{21}^* + T_{12}T_{22}^* &= 0 \\ T_{21}T_{21}^* + T_{22}T_{22}^* &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (425)$$

A másik nullával egyenlő egyenlet ugyanaz mint a már korábban felírt. Mivel ez hat darab komplex egyenletet jelent, a Jones-mátrix összesen $8 - 6 = 2$, azaz két darab független paraméterrel leírható. Ezek általában a következők szoktak lenni: 1) fázistolás ($\Delta\varphi$) a két ortogonális állapot között, 2) a koordináta-rendszer elforgatása (β).

Emellett ilyen esetben a következő is igaz:

$$|\det(\mathbf{T})| = 1 \quad (426)$$

Először az 1990-es években igazolták ki, hogy tetszőleges unitér Jones-mátrix, azaz tetszőleges polarizáció-transzformáció előállítható egy $\lambda/4 + \lambda/2 + \lambda/4$ lemezekből álló optikai eszközzel, amelyben a lemezek az optikai tengely körül forgathatóak [16].

13.4. Polarizálatlan komponenst is tartalmazó fény (kieg. anyag)

Stokes-vektoros leírásmód (+ Müller-mátrixok)

Tökéletes az analógia a kvantummechanikával:

Jones-vektor $\leftrightarrow$ állapotvektor

Jones-mátrix $\leftrightarrow$ operátor mátrixa

polarizáció $\leftrightarrow$ spin

polarizált EM hullám $\leftrightarrow$ koherens kvantumállapot (sajátállapotok szuperpozíciója)

polarizálatlan fény $\leftrightarrow$ kevert állapot (sajátállapotok inkoherens összege)

Poincaré-gömb $\leftrightarrow$ Bloch-gömb

14. SÍKHULLÁMOK TERJEDÉSE ANIZOTRÓP KÖZEGBEN

Források: [3]

Az 1. fejezetben bemutattuk, hogy az elektrodinamika alapegyenleteiben (Maxwell-egyenletek) az EM tér és az anyag közötti kölcsönhatást makroszkópikus formában a relatív dielektromos permittivitás és permeabilitás segítségével írhatjuk le, bevezetve az anyagfüggő $\mathbf{D}$ ill. $\mathbf{H}$ mennyiségeket. Hosszútávú rendezettséget nem mutató anyagokban (pl. amorf szilárdtestek, folyadékok és gázok) ϵ és μ skalár mennyiségek, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{D}$ - $\mathbf{E}$ és $\mathbf{H}$ - $\mathbf{B}$ páronként azonos irányba mutatnak. Léteznek azonban olyan közegek is, ahol egy atom vagy molekula polarizációja nem egyforma mértékű, ha az elektromos térerősségvektor / mágneses indukció irányát változtatjuk – ezeket nevezzük *optikailag anizotróp* anyagoknak, amelyekre tipikus példát az egykristályok szolgáltatnak. Mivel ezek alkalmazása igen széleskörű, a továbbiakban röviden megvizsgáljuk főbb tulajdonságait és fizikai leírásuk módszereit. Az egyszerűség kedvéért homogén, szigetelő közegekben végezzük számításainkat ($\sigma = 0$), ahol a töltéssűrűség is nulla. Mivel az optikai anyagok többsége nem mágnesesezhető, jelen tárgyalásban is feltesszük, hogy $\mu = \mu_0$.

14.1. A térerősségvektorok kölcsönös helyzete

Vizsgálatunk tárgya az elektromos anizotrópia. Teljesen általános esetben az elektromos térerősség minden komponense befolyásolja a dielektromos eltolásvektor mindegyik komponensét. Lineáris közelítésben ez a következő formában írható fel:

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z \end{aligned} \right\} \rightarrow \mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (427)$$

ahol $\boldsymbol{\epsilon}$ a dielektromos permittivitástenzor. Megmutatható (ld. [3]), hogy nem mágnesesezhető, forrás és abszorpciómentes közegben ($\sigma = 0$; $\rho = 0$; $\mu_r = 1$) az energiamegmaradás törvényét leíró

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (428)$$

kontinuitási egyenlet csakis akkor tud teljesülni, ha a permittivitástenzor szimmetrikus, azaz:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} ; \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} ; \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}, \quad (429)$$

ahol $\mathbf{S}$ a teljesítménysűrűség áramlását jellemző Poynting-vektor, w pedig az EM tér össz-energiásűrűségét jelöli. Attól függően, hogy az (427) megfogalmazására használt Descartes-koordináta rendszerünknek mik a bázisvektorai, az $\boldsymbol{\epsilon}$ -ben szereplő paraméterek értéke más és más lesz. Lineáris algebrából megtanultuk, hogy a főátlóra szimmetrikus mátrixok leírására mindig létezik egy olyan bázisvektor-rendszer, amelyben a mátrix diagonális alakra hozható (főtengely-transzformáció):

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (430)$$

A főtengelyek általában megegyeznek az adott kristály fő szimmetriatengelyeivel, így irányuk a hordozó közeg orientációjához szigorúan kötött. Ez alól kivételek a monoklin és triklin elemi cellájú kristályok (ld. később). Mivel a dielektromos permittivitás függ az EM hullám

frekvenciájától (diszperzió), ilyen kristályokban a főtengelyek iránya is a frekvenciával változik. A jelenséget *axiális diszperzió*nak nevezik (ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk).

Nézzük meg, hogyan helyezkednek el egymáshoz képest a térerősség-vektorok anizotróp közegekben. Rigorózus, hullámoptikai vizsgálatainkat síkhullámokra korlátozzuk (azaz eredményeink a geometriai optika érvényességi körén belül általánosan alkalmazhatóak). Mivel minden térjellemező komplex, az ezt jelölő hullámvonalat az alábbiakban nem írjuk ki:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}\quad (431)$$

A makroszkópikus Maxwell-egyenletekből indulunk ki:

$$\left. \begin{aligned}\text{I. } \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \text{II. } \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III. } \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \text{IV. } \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0\end{aligned} \right\} \quad (432)$$

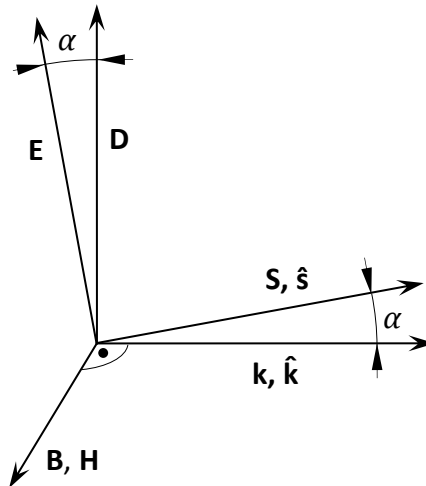
Az indukciós törvény harmonikus síkhullám próbafüggvény esetén:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (433)$$

Valamint a gerjesztési törvény:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \quad (434)$$

Mivel $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, azaz e két vektor azonos irányú, a fenti két egyenletből az következik, hogy $\mathbf{B}$ merőleges $\mathbf{E}$ -re és $\mathbf{D}$ -re is. Emellett $\mathbf{B}$ merőleges $\mathbf{k}$ -ra is, tehát $\mathbf{B} \perp \mathbf{D} \perp \mathbf{k}$. A Poynting-vektor pedig $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, tehát $\mathbf{H} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{S}$. A fentieket foglalja össze a 69. ábra, általános esetben. Ha $\mathbf{E}$ éppen valamelyik főtengely irányába áll, (430) értelmében pont párhuzamos lesz $\mathbf{D}$ -vel.



69. ábra. Elektromos/mágneses térerősség-, dielektromos eltolás-, indukció-, hullámszám- és Poynting-vektorok kapcsolata elektromos anizotrópia esetén.

14.2. Fázis- és sugársebesség

Vizsgáljuk meg a síkhullámok terjedési sebességét anizotróp közegben. Vezessük be a $\hat{\mathbf{k}}$ egységvektort, ami a hullámszámvektor irányába mutat ([3] ezt $\hat{\mathbf{s}}$ -el jelöli, ami félrevezető lehet, ezért használunk helyette könnyebben megjegyezhető betűjelet):

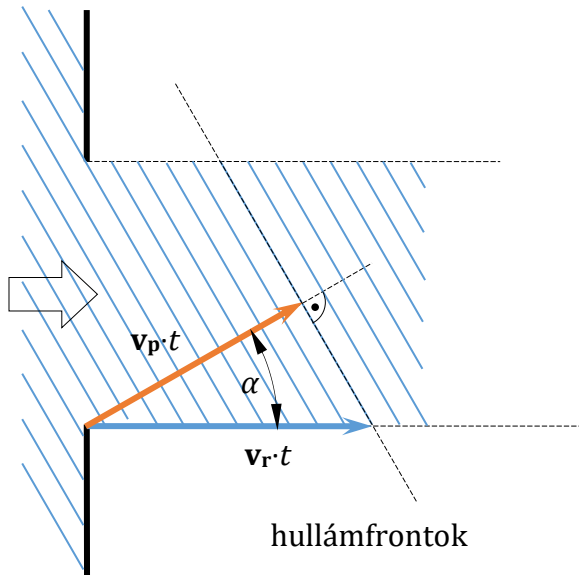
$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v_p} \hat{\mathbf{k}} \quad (435)$$

Itt v_p jelöli a *fázissebességet* (a hullámfrontok $\hat{\mathbf{k}}$ irányú terjedési sebességét). Megmutatható, hogy (levezetést ld. [3]):

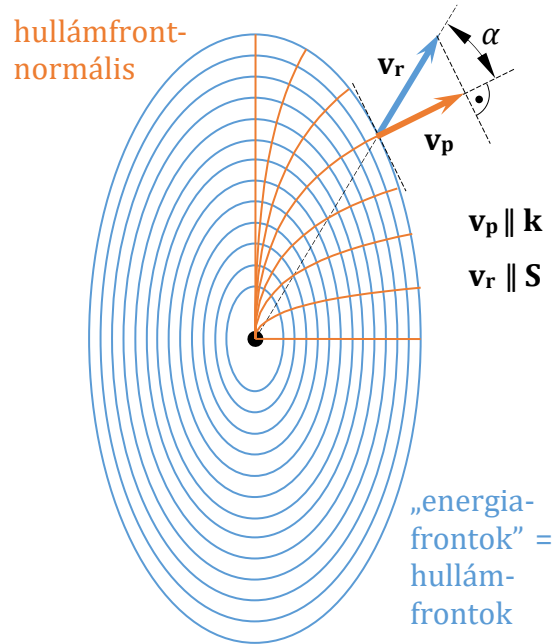
$$w = \frac{\mathbf{S}}{v_p} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{S} \cdot \cos(\alpha)}{v_p} \quad (436)$$

Ebből az energiaterjedés sebessége (*sugársebesség*), ld. 70. és 71. ábra:

$$\mathbf{v}_r = \frac{\mathbf{S}}{w} \Rightarrow v_p = v_r \cdot \cos(\alpha). \quad (437)$$



70. ábra. Síkhullám terjedése anizotróp közegben.



71. ábra. Pontforrás távoltere anizotróp közegben.

14.3. Fresnel-féle sebességi törvény

Most azt fogjuk meghatározni, hogy különböző $\mathbf{k}$ irányokban mekkora lesz v_p értéke. Ehhez először ki kell számolni az ilyen irányú terjedéshez tartozó $\mathbf{E}$ sajátvektorokat és sajátértékeket. (433)-et (434)-ba behelyettesítve:

$$\mathbf{k} \times \left(\mathbf{k} \times \frac{1}{\mu_0 \omega} \right) = -\omega \mathbf{D} \quad (438)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) = -\mu_0 v_p^2 \mathbf{D} \quad (439)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (440)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) = (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{k}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{E} = (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{k}} - \mathbf{E} \quad (441)$$

Ezt visszahelyettesítve (439)-ba:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0 v_p^2} (\mathbf{E} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (442)$$

(427)-et és (442)-ot összevetve egy sajátérték-egyenletet kapunk. Ez a hullámegyenlet síkhullám próbafüggvénnyel, anizotróp esetben (ld. (31) Helmholtz-egyenlet):

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0 v_p^2} (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})). \quad (443)$$

Tegyük fel, hogy az egyszerűség kedvéért $\boldsymbol{\varepsilon}$ -n elvégeztük a főténgely-transzformációt, így most alakja megfelel (430)-nek. Ezzel (443) a következőre egyszerűsödik:

$$\varepsilon_i E_i = \frac{1}{\mu_0 v_p^2} (E_i - \hat{k}_i \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})), \quad \text{ahol } i = x, y, z \quad (444)$$

Ebből a térerősségkomponenseket kifejezve a következőt kapjuk:

$$E_i = \frac{\hat{k}_i \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})}{1 - \varepsilon_i \mu_0 v_p^2} \quad (445)$$

A három egyenlet mindegyikét $\hat{k}_i$ -vel megszorozva, és ezeket összeadva pont az $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}$ skalár szorzatot kapjuk, ami tehát $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}$ -vel elosztva pont 1-et ad:

$$\frac{\hat{k}_x^2}{1 - \varepsilon_x \mu_0 v_p^2} + \frac{\hat{k}_y^2}{1 - \varepsilon_y \mu_0 v_p^2} + \frac{\hat{k}_z^2}{1 - \varepsilon_z \mu_0 v_p^2} = 1 \quad (446)$$

Korábbi megállapításunknak szerint ha $\mathbf{E}$ főténgely irányú, akkor párhuzamos $\mathbf{D}$ -vel, amiből az is következik, hogy ilyenkor a sugár- és fázissebességek is azonos irányúak és azonos abszolút értékűek. Ezeket *fősebességnek* nevezzük, melyek értékei:

$$u_x \triangleq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_x \mu_0}} ; \quad u_y \triangleq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_y \mu_0}} ; \quad u_z \triangleq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z \mu_0}} \quad (447)$$

Azért választottunk $u_{x,y,z}$ -t a fősebességek jelölésére, hogy még véletlenül se legyenek összekeverhetők a $\mathbf{v}$ sebességvektor x, y, z komponenseivel. Fontos megérteni, hogy u_x sebesség E_x irányú, u_y E_y irányú, u_z pedig E_z irányú térerősséghez tartozik. Ha $\mathbf{E}$ párhuzamos valamelyik főténgellyel, akkor $\mathbf{D}$ is az lesz, és ekkor $v_p = u_{x,y,z}$. Ezzel (446)-ból ez lesz:

$$\frac{\hat{k}_x^2}{1 - \frac{v_p^2}{u_x^2}} + \frac{\hat{k}_y^2}{1 - \frac{v_p^2}{u_y^2}} + \frac{\hat{k}_z^2}{1 - \frac{v_p^2}{u_z^2}} = 1 \quad (448)$$

Mivel $\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 + \hat{k}_z^2 \equiv 1$, a fenti egyenlet átalakítható a következő alakba:

$$\frac{\hat{k}_x^2}{u_x^2 - v_p^2} + \frac{\hat{k}_y^2}{u_y^2 - v_p^2} + \frac{\hat{k}_z^2}{u_z^2 - v_p^2} = 0. \quad (449)$$

Ez a Fresnel-féle sebességi törvény. Ha $u_x \neq u_y \neq u_z$ akkor (449) v_p^2 -ben másodfokú egyenletre vezet (a fenti kifejezést megszorozva a nevezők szorzatával), ami azt jelenti, hogy általános esetben minden terjedési irányhoz két különböző sebességérték tartozik (v'_p és v''_p). Ezeket behelyettesítve (445)-be a két sajátvektor komponenseinek arányaira ($E'_x : E'_y : E'_z$ ill. $E''_x : E''_y : E''_z$)

valós számokat kapunk, ami azt jelenti, hogy az $\mathbf{E}'$ és $\mathbf{E}''$ sajátvektorok *lineárisan polarizáltak*. Az (321) összefüggés alapján ugyanez elmondható $\mathbf{D}'$ és $\mathbf{D}''$ -re is. A fentiek miatt a (430)-el leírható optikai tulajdonságot *kettőstörésnek* nevezzük.

Az u_x ; u_y ; u_z fősebességek nem a megfelelő x , y , z irányba terjedő hullámfront sebességét jelentik! Pl. ha z -irányú a fázissebesség ($\hat{k}_x = \hat{k}_y = 0$ és $\hat{k}_z = 1$), akkor $v'_p = u_x$ és $v''_p = u_y$. Általában, ha $\mathbf{E}$ párhuzamos az x , y , z főtengellyel, akkor $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$, azaz $\hat{\mathbf{k}}\mathbf{E} = 0$, vagyis (444) alapján $v_p = u_{x,y,z}$.

A figyelmes olvasónak feltűnhetett a Fresnel-féle sebességegyenlet levezetésénél, hogy (445)-t úgy írtuk fel, hogy az előző egyenlet mindkét oldalát elosztottuk $(1 - \varepsilon_i \mu_0 v_p^2)$ -el, és nem vizsgáltuk meg mi történik ha ezen kifejezések értéke zérus. A (444) egyenlethármas alapján ez akkor lehetséges, ha $\mathbf{E}$ párhuzamos valamelyik főtengellyel, pl. x -el. Ekkor $E_y = E_z = 0$, vagyis a második két egyenlet alapján $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0$. Emiatt az első egyenlet csak akkor tud teljesülni, ha $v_p = u_x$, vagyis a nevezők zérushelyei pont megoldásai a (449) egyenletnek, melynek használatakor ezeket az eseteket ki kell zárni.

Nézzük meg most az egy terjedési irányhoz tartozó két dielektromos eltolásvektor relatív irányát. (445) alapján

$$D_x = \varepsilon_x E_x = \varepsilon_x \frac{\hat{k}_x \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})}{1 - \frac{v_p^2}{u_x^2}} = \varepsilon_x u_x^2 \frac{\hat{k}_x \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})}{u_x^2 - v_p^2} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\hat{k}_x \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})}{u_x^2 - v_p^2} \quad (450)$$

Behelyettesítve a v'_p és v''_p sebességeket (450)-be és a kapott két dielektromos eltolásvektort skálárisan összeszorozva:

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'' = \frac{1}{\mu_0^2} \left[\frac{\hat{k}_x(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{E}')}{u_x^2 - v'^2_p} \cdot \frac{\hat{k}_x(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{E}'')}{u_x^2 - v''^2_p} + \frac{\hat{k}_y(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{E}')}{u_y^2 - v'^2_p} \cdot \frac{\hat{k}_y(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{E}'')}{u_y^2 - v''^2_p} + \frac{\hat{k}_z(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{E}')}{u_z^2 - v'^2_p} \cdot \frac{\hat{k}_z(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{E}'')}{u_z^2 - v''^2_p} \right], \quad (451)$$

ami átrendezve, és (449)-t figyelembe véve:

$$\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}'' = \frac{1}{\mu_0^2} \frac{(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{E}')(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{E}'')}{v'^2_p - v''^2_p} \cdot \left[\frac{\hat{k}_x^2}{u_x^2 - v'^2_p} + \frac{\hat{k}_y^2}{u_y^2 - v'^2_p} + \frac{\hat{k}_z^2}{u_z^2 - v'^2_p} - \frac{\hat{k}_x^2}{u_x^2 - v''^2_p} - \frac{\hat{k}_y^2}{u_y^2 - v''^2_p} - \frac{\hat{k}_z^2}{u_z^2 - v''^2_p} \right] = 0 \quad (452)$$

Ebből az következik, hogy az adott terjedési irányhoz tartozó két $\mathbf{D}$ sajátvektor mindig merőleges egymásra. Ugyanez a viszony az $\mathbf{E}'$ és $\mathbf{E}''$ vektorokra is igazolható, melyek mindketten ortogonálisak a Poynting-vektorra.

Most határozzuk meg az egy adott hullámfrontnormálisához tartozó Poynting-vektor irányokat. Bevezetve a g segédmenyiséget:

$$g \triangleq \frac{1}{\left(\frac{\hat{k}_x}{u_x^2 - v_p^2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{k}_y}{u_y^2 - v_p^2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{k}_z}{u_z^2 - v_p^2} \right)^2}, \quad (453)$$

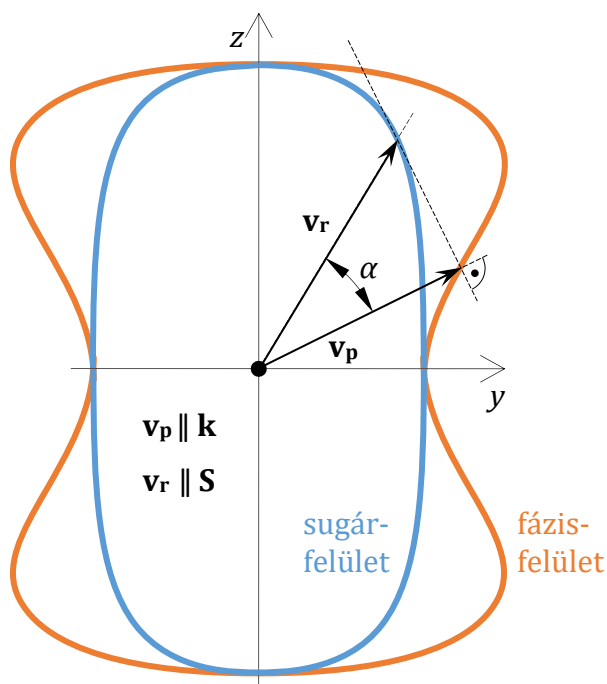
igazolható (ld. [3]), hogy

$$v_f^2 = \frac{g}{v_p^2} + v_p^2 \quad (454)$$

Továbbá

$$\hat{s}_i = \frac{\hat{k}_i}{v_p v_r} \left(v_p^2 - \frac{g}{u_i^2 - v_p^2} \right), \quad (455)$$

ahol bevezettük az $\hat{s}$ egységvektort, ami a Poynting-vektor irányába mutat ($\hat{s} \triangleq \mathbf{S}/S$). Mivel adott hullámfrontnormálishoz két v_p és v_r sebességérték tartozik, a fenti egyenlet azt jelenti, hogy az adott hullámfrontnormálishoz meghatározott $\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}''$ sajátvektorokhoz két, *eltérő Poynting-vektor irány* tartozik! A síkhullámok sugár- és fázissebesség vektorai közötti kapcsolatot a 72. ábra szemlélteti.



72. ábra. Síkhullámok sugár- és fázisfelületei általános esetben, valamint a fázis- és sugársebesség kapcsolata.

A sugárfelületek általában nem ellipszoidok, hanem negyedrendű felületek, a fázisfelületek pedig hatodrendű felületek, ld. (449). A két sajátértéknek megfelelően 2-2 ilyen felület van. Mivel a sugárfelület megmutatja, hogy adott irányba t idő alatt mekkora távolságra jut el az energia, az ábra origójába egy pontforrást elhelyezve a kék görbe pont az elektromágneses hullám szakadási felületeinek alakját (amik egyfajta energiafrontok) fogja megadni. Az eddigiek alapján pedig ezek egybeesnek a hullámfrontokkal.

Úgynevezett kéttengelyű kristályokban (ld. később) két speciális (ún. optikai tengely) irányú hullámfrontnormális esetén (455) nevezőjében zérus érték jelenik meg. E szingularitás miatt a Poynting-vektor iránya meghatározatlan, ami a *kónikus refrakció* érdekes jelenségéhez vezet.

14.4. Indexellipszoid

Az EM tér teljes energiasűrűsége a következő módon írható fel:

$$w = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (456)$$

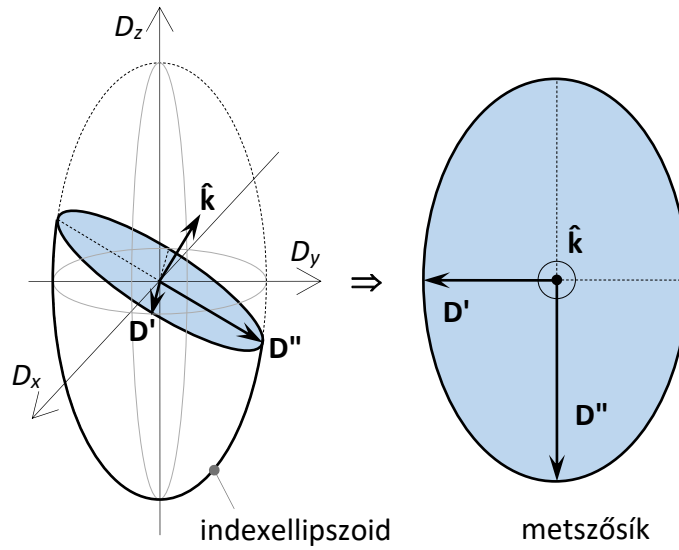
Az általunk vizsgált, főtengely-transzformált rendszerben ez a következőképpen írható:

$$w = \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \quad (457)$$

Most nézzük meg, hogy az azonos energiasűrűségű, de más és más irányba haladó síkhullámok esetén milyen módon határozható meg $\mathbf{D}$ iránya és hossza. Az egyszerűség kedvéért legyen $w := 1$.

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} = 1 \quad (458)$$

Ez egy ellipszoid felületet ad, amit *indexellipszoidnak* hívnak, ld. 73. ábra. Emlékezzünk rá, hogy $\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}''$ és $\hat{\mathbf{k}}$ orthogonális vektorhármass. Megmutatható, hogy egy adott irányú hullámszámvektor esetén a két $\mathbf{D}$ sajátvektor az alábbi ábrán látható módon határozható meg.



73. ábra. Indexellipszoid (indicatrix), valamint a polarizációs sajátállapotok meghatározása.

Az ellipszoid féltengelyeinek hossza rendre (ezek a Maxwell-reláció alapján arányosak a törésmutatóval, innen az elnevezés):

$$\sqrt{\varepsilon_x} ; \sqrt{\varepsilon_y} ; \sqrt{\varepsilon_z}, \quad (459)$$

amit $\sqrt{\mu_0}$ -val szorozva pont a fősebességek reciprokát kapjuk. Ebből kiindulva igazolható, hogy általános esetben a fenti módon meghatározott $\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}''$ vektorok hosszát $\sqrt{\mu_0}$ -val megszorozva ($w = 1$ normálás esetén) éppen a fázissebességek reciprokát kapjuk $1/v_p$ ill. $1/v''_p$ -et. Ha ezt még c -vel is megszorozzuk, akkor pedig az adott irányba mutató $\mathbf{D}$ vektorhoz tartozó törésmutató értékét kapjuk (mivel $n = c/v$).

Meg kell jegyeznünk azt az észrevételt is, hogy egyáltalános ellipszoidnak két metszősíkja van, amelyen a keresztmetszet *kör alakú*. Ezek normálisvektorát a kristály *optikai tengelyeinek* nevezik. Az ilyen tulajdonságot mutató kristályok anizotrópiáját *kéttengelyű kettőtörésnek* nevezik. Amennyiben az indexellipszoid tengelyszimmetrikus (mondjuk a z-tengely körül), akkor e két kör keresztmetszet eggyé fajul, melynek normálisa, azaz az optikai tengely a z irányba mutat. Az ilyen anyagok anizotrópiáját *egytengelyű kettőtörésnek* nevezik.

14.5. Kristálytani alapismeretek

A kristályok elemi cellája az a legkisebb térfogategység, amelyet periodikusan ismételve a teljes tér hézag- és átfedésmentesen kitölthető. Matematikailag igazolható, hogy a három dimenziós térben összesen 14-féle elemi cellájú kristályszerkezet létezik. Ezeket Bravais-rácsoknak nevezik. A szimmetriaviszonyok alapján belőlük képezhető hét csoportot az alábbi táblázat mutatja.

Kristályrendszer	Főtengelyek x, y, z	Indexellipszoid	Optikai osztály	Alkalmazási példák
Triklin	CCC	általános ellipszoid	kéttengelyű	?
Monoklin	CCF	általános ellipszoid	kéttengelyű	LYSO
Ortorombos	FFF	általános ellipszoid	kéttengelyű	BaSO ₄ , HgCl ₂ , KTP
Trigonális	FRR	hengersizmetrikus	egytengelyű	SiO ₂ , KDP, LiNbO ₃ , Al ₂ O ₃ , BBO
Tetragonális	FRR	hengersizmetrikus	egytengelyű	SiO ₂ , ADP, TeO ₂
Hexagonális	FRR	hengersizmetrikus	egytengelyű	SiO ₂ , CaCO ₃
Köbös	RRR	gömb	izotróp	NaCl, CaF ₂ , BGO, C (gyémánt)

3. táblázat. Szimmetria szerinti kristálytani csoportok és jellemzőik, az optikában használt fontosabb anyagok feltüntetésével. C – axiális diszperzióval; F – rögzített irányú főtengely; R – szabadon forgó vagy határozatlan főtengely ([3] alapján); Megjegyzés: a kvarc többféle kristálycsoportban is képes kristályosodni.

14.6. Egytengelyű kettőtörés

Legyen a kristály optikai tengelye a z -tengely. Ekkor $u_x = u_y \triangleq u_o$ és $u_z \triangleq u_e$, ahol u_o -t ordinárius, u_e -t extraordinárius fősebességeknek nevezik. A célunk, hogy meghatározzuk a fázissebességek irányfüggését. Emlékeztetünk rá, hogy (445) egyenlet megadásakor elosztottuk mindkét oldalt $(1 - \varepsilon_i \mu_0 v_p^2)$ -el, és a Fresnel-féle sebességi egyenlet megoldásánál kizártuk a $v_p = u_{x,y,z}$ eseteket. Mint alább ki fog derülni, egytengelyű kettőtörésnél az egyik megoldás pont ilyen eredményre fog vezetni. Lépünk egyet tehát vissza, és induljunk ki (444)-ből. Ebbe behelyettesítve az újonnan bevezetett ordinárius és extraordinárius fősebességeket:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{u_o^2}{v_p^2} \left(E_x - \hat{k}_x \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) \right) \\ E_y &= \frac{u_o^2}{v_p^2} \left(E_y - \hat{k}_y \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) \right) \\ E_z &= \frac{u_e^2}{v_p^2} \left(E_z - \hat{k}_z \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}) \right) \end{aligned} \right\} \quad (460)$$

Most egy olyan megoldást keressünk, ahol az elektromos térerősségvektor mindig benne van az x - y síkban, azaz $E_z = 0$. Ekkor a harmadik egyenlet alapján: $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0$, azaz a hullámszámvektor merőleges $\mathbf{E}$ -re. Emiatt *mindkét* első két egyenlet ugyanarra vezet:

$$1 = \frac{u_o^2}{v_p^2} \quad (461)$$

Ebből megkapjuk az első megoldást, és ez pont az, ami (445) nevezőjében zérust adna:

$$v_p' = u_o. \quad (462)$$

Ez azt jelenti, hogy ha $E_z = 0$, akkor bármerre is mutasson a hullámszámvektor, a fázissebesség mindig megegyezik az ordinárius fázissebességgel (ami összhangban van az index-ellipszoidból is kapható megoldással). Ez 3D-ben gömbfelületként ábrázolható.

Felvetődhet a kérdés, hogy mi történik, ha $v_p = u_e$. Az eddigiek alapján ez csak akkor fordulhat elő ha $E_x = E_y = 0$, azaz a térerősségnek csak z-komponense van. Ilyenkor értelemszerűen a hullámszámvektor az x-y síkban marad. Mivel ez a Fresnel-sebességi egyenletben ez ismét szingularitást okozna, ezt az esetet a további vizsgálatokból kizárjuk.

Ezeknek megfelelően határozzuk meg a másik megoldást (449) alapján:

$$\frac{\hat{k}_x^2}{u_o^2 - v_p^2} + \frac{\hat{k}_y^2}{u_o^2 - v_p^2} + \frac{\hat{k}_z^2}{u_e^2 - v_p^2} = 0 \quad (463)$$

Vizsgálódjunk csak az x-z síkban ($\hat{k}_y := 0$), hiszen z-re a kristály úgyis tengelyszimmetrikus, és szorozzuk meg (463)-et a nevezők szorzatával (itt ezek már nem lehetnek nullák). Az egyszerűsítés után ezt kapjuk:

$$\hat{k}_x^2(u_e^2 - v_p^2) + \hat{k}_z^2(u_o^2 - v_p^2) = 0 \quad (464)$$

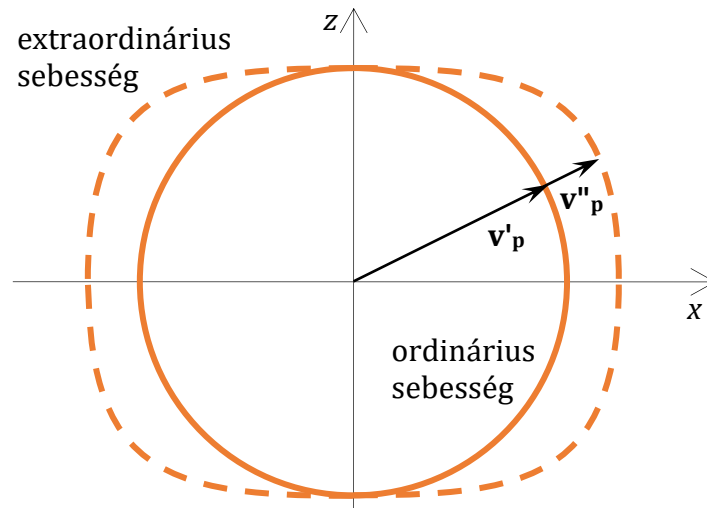
Némi átalakítás után:

$$v_p''^2 = \frac{\hat{k}_x^2 u_e^2 + \hat{k}_z^2 u_o^2}{\hat{k}_x^2 + \hat{k}_z^2} \quad (465)$$

mivel a $\hat{k}_x^2 + \hat{k}_z^2 = 1$, ebből ezt kapjuk:

$$v_p''^2 = \hat{k}_x^2 u_e^2 + \hat{k}_z^2 u_o^2. \quad (466)$$

Ez pedig egy negyedrendű görbe, az ún. ovális (3D-ben ovaloid) egyenlete. Ha $\hat{k}_z = 0$, azaz $\hat{k}_x = 1$, ez visszaadja a korábban kizárt esetet is, hiszen ekkor $v_p'' = u_e$. Ha $u_o > u_e$, akkor pozitív, ellenkező esetben negatív kettőtörésről beszélünk (ld. 74. ábra).



74. ábra. Fázisfelületek egytengelyű kettőtörés esetén.

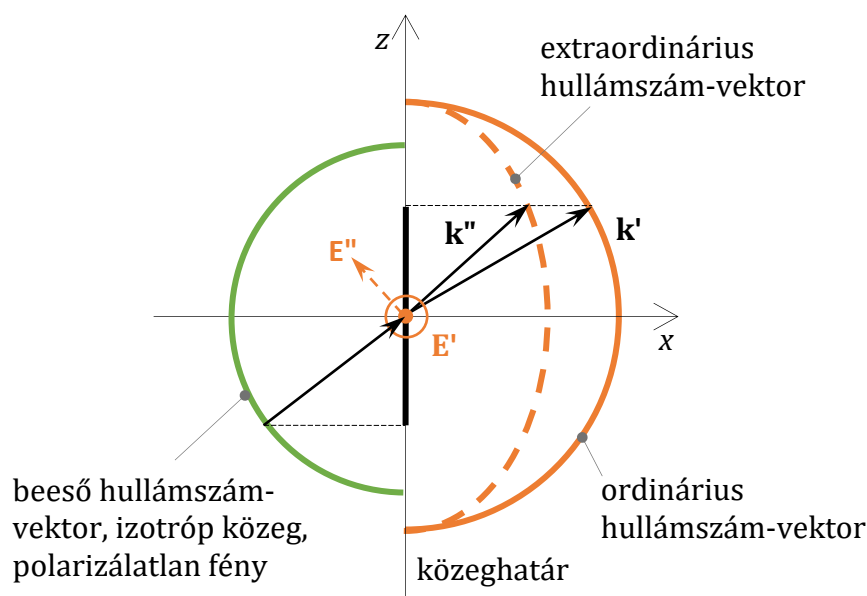
Most nézzük meg a k'' hullámszámvektor hosszának irányfüggését. (466)-be a sebességek helyére a $n = c/v_p$ alapján a megfelelő törésmutatókat beírva, c-vel egyszerűsítve:

$$\frac{1}{n''^2} = \frac{\hat{k}_x^2}{n_e^2} + \frac{\hat{k}_z^2}{n_o^2}. \quad (467)$$

$(2\pi/\lambda_0)^2$ -el elosztva pedig a hullámszámvektor-hosszát kapjuk meg adott irányú hullámfrontnormális esetén (ne felejtsük el, hogy mind n'' és k'' értéke irányfüggő!):

$$\frac{1}{k''^2} = \frac{\hat{k}_x^2}{k_e^2} + \frac{\hat{k}_z^2}{k_o^2} \Rightarrow 1 = \frac{k_x''^2}{k_e^2} + \frac{k_z''^2}{k_o^2}, \quad (468)$$

ami egy ellipszis egyenlete.



75. ábra. Fénytörés izotróp/anizotróp közeg határán.

Anyag	n_o [-]	n_e [-]
CaCO ₃ (kalcit)	1,658	1,486
SiO ₂ (kvarc)	1,544	1,553

4. táblázat. Törésmutató-példák egytengelyű kettőtörés esetén (szobahőmérsékleten, $\lambda_d = 588$ nm-es hullámhosszon mérve).

14.7. Fáziskésleltető lemezek

...

14.8. További anizotróp jelenségek (kieg. anyag)

Dikroizmus

Optikai aktivitás

Mechanikai feszültség által indukált kettőtörés

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretném kifejezni hálás köszönetemet kollégáimnak a jegyzet elkészítésében nyújtott segítségükért. Dr. Koppa Pálnak az elektrodinamikai részek első verziójának megírását, dr. Barócsi Attilának a polarizációs fejezet első verziójának elkészítését köszönöm, dr. Füzessy Zoltánnak a statisztikus optikai fejezetek, Dr. Péczeli Imrének a diffrakciós részek, dr. Kocsányi Lászlónak pedig az anizotrópiát tárgyaló fejezet átnézéséért tartozom hálával. Nagyon hálás vagyok Dr. Richter Péternek az angol változat gondos lektorálásáért mind a nyelvten, mind a fizika szempontjából.

HIVATKOZÁSJEGYZÉK

- [1] Klein-Furtak, Optics
- [2] Simonyi Károly, A fizika kultúrtörténete
- [3] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics
- [4] John Gribbin, Schrödinger kiscicái és a valóság keresése – A kvantummechanika rejtélyeinek nyomában
- [5] P.C.Y Chang, J.G. Walker, K.I. Hopcraft, Ray tracing in absorbing media, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, vol. 96, pp. 327-341, 2005.
- [6] Richter Péter (szerk.), Bevezetés a modern optikába
- [7] Hartmann Römer, Theoretical Optics
- [8] Füzessy Zoltán: A fotonika optikai alapjai
- [9] Goodman, Introduction to Fourier optics
- [10] Thomas Young, A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts, Vol. I., 1807
- [11] Carlos R. Stroud Jr, A jewel in the crown, Univ. of Rochester, 2004
- [12] Saleh-Teich, Fundamentals of Photonics
- [13] Goodman, Statistical Optics
- [14] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, p. 302, 1972.
- [15] <http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html>
- [16] R. Simon, Minimal Three-component SU(2) Gadget for Polarization Optics, Phys. Let. A, Vol. 143, No. 4,5, pp. 165-169, 1990.