

## Relativitáselmélet feladatok 1.

**1. feladat:** Mutassuk meg, hogy az  $\mathcal{L}^\dagger$  ortokrón Lorentz transzformációk csoportot alkotnak! Megjegyzés: Az  $L \in \mathcal{L}^\dagger$  ortokrón Lorentz transzformációkat reprezentáló  $\Lambda^a_b$ ,  $a, b = 1, 2, 3, 4$  mátrixokra teljesül, hogy  $\Lambda^4_4 \geq 1$  és  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ .

**2. feladat:** Ismeretes, hogy  $u, v$  időszerű vektorok esetén az  $u \cdot v \equiv g(u, v) < 0$  Lorentz invariáns feltételt felhasználhatjuk arra, hogy  $u, v$  azonos időirányításáról beszélhessünk. Mutassuk meg, hogy ezt a feltételt  $u \cdot n \equiv g(u, n) < 0$  alakban egy  $n$  nem zérus fényszerű vektor esetén is használhatjuk!

**3. feladat:** Határozzuk meg az ortokrón Lorentz transzformációt reprezentáló  $\Lambda^a_b$  hiányzó mátrixelemeit abban az esetben ha ismeretes, hogy

$$\Lambda^4_4 = \gamma, \quad \Lambda^4_1 = \Lambda^1_4 = -\beta\gamma \quad \Lambda^4_i = \Lambda^i_4 = 0, \quad i = 2, 3.$$

**4. feladat:** Egy tetszőleges  $x \in (\mathbb{M}, g)$  Minkowski téridőbeli vektorra tekintsük az alábbi Hermitikus mátrixot

$$X(x) \equiv \begin{pmatrix} x^4 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^4 - x^3 \end{pmatrix} = X^\dagger(x).$$

Ekkor  $\text{Det} X(x) = -x \cdot x = -g(x, x) = -Q(x)$ . Hogyan írható fel  $g(x, y)$  a megfelelő  $X(x)$  és  $Y(y)$  mátrixok segítségével? Az eredményt írjuk fel az

$$\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2$  antiszimmetrikus mátrix segítségével!

**5. feladat:** Legyen

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\theta}{2} & -i \sinh \frac{\theta}{2} \\ i \sinh \frac{\theta}{2} & \cosh \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Számítsuk ki az

$$X(\hat{x}) \equiv SX(x)S^\dagger$$

mátrixot! A kapott  $\hat{x} \in \mathbb{M}$  vektort írhatjuk-e az  $\hat{x}^a = M^a_b x^b$  alakba ahol  $M^a_b$  egy  $4 \times 4$ -es mátrix? Mi az  $x \mapsto \hat{x}$  transzformáció fizikai jelentése?