Modern matematikai módszerek a fizikában
Gyakorló feladatok - Megoldások

1. feladat:

(a) A nevező parciális törtekre bontása:

$$z^2 - 4z + 3 = 0 \qquad \to \qquad z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{2}{(z-3)(z-1)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

A Laurent-sor az egyes tartományokon:

- $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{3^{k+1}}\right) z^k\right]$$

- $1 < |z| < 3$:

$$\frac{1}{1-z} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} \qquad \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k$$

$$f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z^k} + \frac{z^{k-1}}{3^k}\right]$$

- $|z| > 3$:

$$\frac{1}{1-z} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} \qquad \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^k$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(3^{k-1} - 1\right)\frac{1}{z^k}\right]$$

(b) A belső függvény zérushelyei:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad \to \qquad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

A belső függvény deriváltja a zérushelyeken:

$$(x^2-4x-5)' = 2x-4 \qquad \rightarrow \qquad 2x-4|_{x=5} = 6 \qquad 2x-4|_{x=-1} = -6$$

Ezzel az integrál értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+x-2)\delta\big(x^2-4x-5\big)dx = \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+x-2)\Big[\delta\big(x-5\big)+\delta\big(x+1\big)\Big]dx =$$

$$= \frac{1}{6}\big(28-2\big) = \frac{13}{3}$$

2. feladat:

(a) A nevező parciális törtekre bontása:

$$z^2-5z+6=0 \qquad \rightarrow \qquad z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z-3)(z-2)} = \frac{7}{z-3} - \frac{5}{z-2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

A Laurent-sor az egyes tartományokon:

- $|z| < 2$:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k \qquad \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{5}{2^{k+1}} - \frac{7}{3^{k+1}}\right)z^k\right]$$

- $2 < |z| < 3$:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k \qquad \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k$$

$$f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left[5\cdot\frac{2^{k-1}}{z^k} + 7\cdot\frac{z^{k-1}}{3^k}\right]$$

- $|z| > 3$:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k \qquad \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^k$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(7\cdot 3^{k-1} - 5\cdot 2^{k-1}\right)\frac{1}{z^k}\right]$$

(b) A belső függvény zérushelyei:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_0 = 0,\; x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

A belső függvény deriváltja a zérushelyeken:

$$(x^3 - 3x^2 + 2x)' = 3x^2 - 6x + 2 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 6x + 2|_{x=0} = 2 \quad 3x^2 - 6x + 2|_{x=1} = -1$$
$$3x^2 - 6x + 2|_{x=2} = 2$$

Ezzel az integrál értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\delta\big(x^3 - 3x^2 + 2x\big)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\big[\delta\big(x\big) + \delta\big(x-2\big)\big]dx +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\delta\big(x-1\big)dx = \frac{1}{2}\big(1+1\big) - 1 = 0$$

3. feladat:

(a) Az integrálást a reziduum tétel segítségével végezzük el.

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1} = \frac{g(z)}{h(z)}, \text{ ahol } g(z) = z^2 \text{ és } h(z) = z^4 + 1$$

Az $f(z)$ függvény szinguláris pontjai:

$$h(z) = z^4 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z^4 = -1 \quad \rightarrow \quad z^2 = \pm i$$
$$z^2 = i = e^{i\pi/2} \quad \rightarrow \quad z_{1,2} = \pm e^{i\pi/4}$$
$$z^2 = -i = e^{-i\pi/2} \quad \rightarrow \quad z_{3,4} = \pm e^{-i\pi/4}$$

A szinguláris pontokat a komplex síkon az (1) ábra mutatja, a lehetséges integrálási kontúrokkal együtt. A reziduumok az egyes pontokban:

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)} = \frac{e^{i\pi/2}}{4e^{i3\pi/4}} \qquad \text{Res}(f, z_2) = \frac{g(z_2)}{h'(z_2)} = -\frac{e^{i\pi/2}}{4e^{i3\pi/4}}$$
$$\text{Res}(f, z_3) = \frac{g(z_3)}{h'(z_3)} = \frac{e^{-i\pi/2}}{4e^{-i3\pi/4}} \qquad \text{Res}(f, z_4) = \frac{g(z_4)}{h'(z_4)} = -\frac{e^{-i\pi/2}}{4e^{-i3\pi/4}}$$

A kontúrt zárhatjuk a felső (Γ_1) és az alsó (Γ_2) félsíkon is. A félkör járuléka mindkét esetben 0 lesz, mivel az f függvény nevezőjének fokszáma kettővel nagyobb, mint a számlálóé (lásd gyakorlat). Ha a felső félsíkon zárjuk a kontúrt, akkor z_1 és z_4, míg ha az alsón, akkor z_2 és z_3 esik az integrálási görbén belülre. Az integrál mindkét esetben ugyanazt adja (fontos, hogy Γ_2

negatív irányítottságú):
Γ_1-re integrálva:

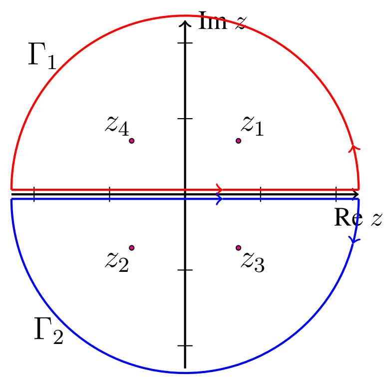
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz = 2\pi i\Big(\text{Res}(f,z_1) + \text{Res}(f,z_4)\Big) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{i\pi/2}}{4e^{i3\pi/4}} - \frac{e^{-i\pi/2}}{4e^{-i3\pi/4}}\right) = \frac{\pi}{2i}\left(e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}\right) = \pi \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

Γ_2-re integrálva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \oint_{\Gamma_2} f(z)dz = -2\pi i\Big(\text{Res}(f,z_2) + \text{Res}(f,z_3)\Big) =$$

$$= -2\pi i \left(-\frac{e^{i\pi/2}}{4e^{i3\pi/4}} + \frac{e^{-i\pi/2}}{4e^{-i3\pi/4}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$



1. ábra. Szinguláris pontok a komplex síkon és a lehetséges integrálási kontúrok.

(b) Ebben az esetben is a reziduum tételt használjuk.

$$f(z) = \frac{1}{z^{4n}+1} = \frac{g(z)}{h(z)}, \text{ ahol } g(z) = 1 \text{ és } h(z) = z^{4n}+1$$

Az $f(z)$ függvény szinguláris pontjai:

$$h(z) = z^{4n} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z^{4n} = -1 \quad \rightarrow \quad z^{2n} = \pm i$$

$$z_k^+ = e^{i\frac{2k+1}{4n}\pi} \qquad z_k^- = -e^{i\frac{2k+1}{4n}\pi} \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1$$

A z^+-szal jelölt $2n$ darab szinguláris pont a felső, míg a z^--szal jelölt további $2n$ darab szinguláris pont az alsó félsíkon fekszik. A reziduumok a z^+ pontokban:

$$h'(z) = 4nz^{4n-1} \quad \rightarrow \quad h'(z_k^+) = 4ne^{i(2k+1)\frac{4n-1}{4n}\pi} = 4n\underbrace{e^{i(2k+1)\pi}}_{-1}e^{-i\frac{2k+1}{4n}\pi}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_k^+) = \frac{1}{h'(z_k^+)} = -\frac{1}{4n}e^{i\frac{2k+1}{4n}\pi}$$

A kontúr ebben az esetben is bezárható mindkét félsíkon, a félkörök járuléka nulla. A görbét a felső félsíkon zárva:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{4n}}dx = \oint f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{2n-1} \mathrm{Res}(f, z_k^+) = 2\pi i \sum_{k=0}^{2n-1} -\frac{e^{i\frac{2k+1}{4n}\pi}}{4n} =$$

$$= \frac{\pi}{n}\underbrace{\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{2n} e^{i\frac{2k-1}{4n}\pi}}_{\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)$$

A $\lim_{n\to\infty} I_n$ határérték kiértékeléséhez célszerű a szummáról integrálásra áttérni:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\int_{1}^{n}\cos\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)dk =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[\frac{2n}{\pi}\sin\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)\right]_1^n = \lim_{n\to\infty} 2\left[\underbrace{\sin\left(\frac{2n-1}{4n}\pi\right)}_{\downarrow \atop 1} - \underbrace{\sin\left(\frac{1}{4n}\pi\right)}_{\downarrow \atop 0}\right] = 2$$

Gyorsabban is erre az eredményre juthatunk, amennyiben a határértéket az integráláson belülre visszük:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^{4n}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{4n}}\right)dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

ahol kihasználtuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{4n}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| > 1 \\ 1, & \text{ha } |x| \leq 1 \end{cases}$$

4. feladat:

(a) Az integrálást a reziduum tétel segítségével végezzük el.

$$f(z) = \frac{z^2}{z^6+1} = \frac{g(z)}{h(z)}, \text{ ahol } g(z) = z^2 \text{ és } h(z) = z^6 + 1$$

Az $f(z)$ függvény szinguláris pontjai:

$$h(z) = z^6 + 1 = 0 \quad \to \quad z^6 = -1 = e^{i\pi} \quad \to \quad z_k = e^{i\frac{2k+1}{6}\pi},\ k = 0, 1, \ldots, 5$$

A szinguláris pontokat a komplex síkon a (2) ábra mutatja, a lehetséges integrálási kontúrokkal együtt. A reziduumok az egyes pontokban:

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{z_k^2}{6z_k^5} = \frac{1}{6}z_k^{-3} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{2k+1}{2}\pi}$$

A kontúrt zárhatjuk a felső (Γ_1) és az alsó (Γ_2) félsíkon is. A félkör járuléka mindkét esetben 0 lesz, mivel az f függvény nevezőjének fokszáma több, mint kettővel nagyobb, mint a számlálóé (lásd gyakorlat). Ha a felső félsíkon zárjuk a kontúrt, akkor z_0, z_1 és z_2, míg ha az alsón, akkor z_3, z_4 és z_5 esik az integrálási görbén belülre. Az integrál mindkét esetben ugyanazt adja (fontos, hogy Γ_2 negatív irányítottságú):
Γ_1-re integrálva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz = 2\pi i\Big(\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2)\Big) =$$

$$= \frac{2\pi i}{6}\left(\underbrace{e^{-i\pi/2}}_{-i} + \underbrace{e^{-i3\pi/2}}_{i} + \underbrace{e^{-i5\pi/2}}_{-i}\right) = \frac{\pi}{3}$$

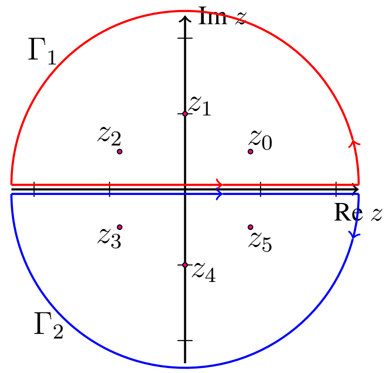
Γ_2-re integrálva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \oint_{\Gamma_2} f(z)dz = -2\pi i\Big(\text{Res}(f, z_3) + \text{Res}(f, z_4) + \text{Res}(f, z_5)\Big) =$$

$$= -\frac{2\pi i}{6}\left(\underbrace{e^{-i7\pi/2}}_{i} + \underbrace{e^{-i9\pi/2}}_{-i} + \underbrace{e^{-i11\pi/2}}_{i}\right) = \frac{\pi}{3}$$

(b) A sin függvényt két komplex fázis összegeként felírva:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{4+x^4}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(e^{iax} - e^{-iax})}{2i(4+x^4)}dx$$



2. ábra. Szinguláris pontok a komplex síkon és a lehetséges integrálási kontúrok.

Az integrált ebben az esetben is a reziduum tétel segítségével határozhatjuk meg:

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{ze^{iza}}{4+z^4} - \frac{ze^{-iza}}{4+z^4}\right) = f_1(z) + f_2(z)$$

Mivel $a \in \mathbb{R}^+$ így az első tag kiértékelésekor az integrálási kontúrt a felső félsíkon zárhatjuk (mivel ekkor $-a\mathrm{Im}(z) < 0$, és így a félkör járuléka eltűnik), míg a második tag kiértékelésekor az alsón. Az integrálok meghatározásához meg kell keresnünk a szinguláris pontokat és ki kell számítanunk a reziduumok értékét:

$$z^4 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad z^4 = -4 = 4e^{i\pi} \quad \rightarrow \quad z_k = \sqrt{2}e^{i\frac{2k+1}{4}\pi},\ k = 0,1,2,3$$

A reziduumok:

$$\mathrm{Res}(f_1, z_k) = \frac{1}{2i}\frac{ze^{iza}}{(z^4+4)'}\bigg|_{z=z_k} = \frac{1}{2i}\frac{z_k e^{iz_k a}}{4z_k^3} = \frac{1}{2i}\frac{e^{iz_k a}}{4z_k^2}$$
$$\mathrm{Res}(f_2, z_k) = \frac{1}{2i}\frac{ze^{-iza}}{(z^4+4)'}\bigg|_{z=z_k} = \frac{1}{2i}\frac{z_k e^{-iz_k a}}{4z_k^3} = \frac{1}{2i}\frac{e^{-iz_k a}}{4z_k^2}$$

Figyelembe véve, hogy a felső félsíkon $z_0 = 1+i$ és $z_1 = -1+i$, míg az alsón $z_2 = -1-i$ és $z_3 = 1-i$ a szinguláris pontok, és, hogy az alsó félsíkon zárva a kontúrt, annak irányítottsága negatív, a következőt kapjuk:

$$I = \oint dz\frac{1}{2i}\frac{ze^{iza}}{4+z^4} - \oint dz\frac{1}{2i}\frac{ze^{-iza}}{4+z^4} = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f_1,z_0) + \mathrm{Res}(f_1,z_1) +$$
$$+ \mathrm{Res}(f_2,z_2) + \mathrm{Res}(f_2,z_3)\big) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^{i(1+i)a}}{2i} + \frac{e^{i(-1+i)a}}{-2i} + \frac{e^{-i(-1-i)a}}{2i} + \frac{e^{-i(1-i)a}}{-2i}\right) =$$
$$= \frac{\pi e^{-a}}{4}\left(\frac{e^{ia} - e^{-ia} + e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right) = \frac{\pi e^{-a}}{2}\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\sin(a)$$

Azaz valóban

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{4+x^4}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}\sin(a) \qquad\qquad (a\in\mathbb{R}^+)$$

5. feladat:

(a) Az

$$f''(x)+2f'(x)+f(x)=2\delta(x)+\delta'(x)$$

egyenletből leolvasva az együtthatókat (a gyakorlaton használt jelöléssel):

$$a=1,\ b=2,\ c=1,\ m=2,\ n=1$$

Ezek alapján a kezdőfeltételek:

$$\left.\begin{array}{l} z'(0)+2z(0)=2 \\ z(0)=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z(0)=1 \\ z'(0)=0 \end{array}$$

A differenciál egyenlet $z(x)$-re:

$$z''(x)+2z'(x)+z(x)=0$$

(b) Az eredeti egyenlet Fourier-transzformáltját véve:

$$\big((-is)^2+2(-is)+1\big)\tilde{f}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(2+(-is)\big)$$

$$\tilde{f}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2-is}{-s^2-2si+1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-i(s+2i)}{-(s+i)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{s+i}-\frac{1}{(s+i)^2}\right)$$

Az inverz Fourier-transzformáció:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dse^{-isx}\tilde{f}(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dse^{-isx}\left(\frac{i}{s+i}-\frac{1}{(s+i)^2}\right)$$

Az integrált a Cauchy-féle integrálformulával értékeljük ki. Amennyiben $x<0$ a kontúrt a felső félsíkon kell zárnunk ahhoz, hogy a félkör járuléka eltűnjön. Mivel a felső félsíkon az integrandus analitikus, az eredmény 0 lesz. Amennyiben $x>0$, a kontúrt az alsó félsíkon kell zárnunk (ebben az esetben a görbe negatív irányítottságú):

$$f(x)=\Theta(x)\frac{1}{2\pi}\oint dse^{-isx}\left(\frac{i}{s+i}-\frac{1}{(s+i)^2}\right)=\Theta(x)\underbrace{\frac{-1}{2\pi i}\oint e^{-isx}\frac{1}{s+i}ds}_{e^{-isx}|_{s=-i}=e^{-x}}+$$

$$+\,i\Theta(x)\underbrace{\frac{-1}{2\pi i}\oint e^{-isx}\frac{1}{(s+i)^2}ds}_{(e^{-isx})'|_{s=-i}=-ixe^{-x}}=\Theta(x)e^{-x}\big(1+x\big)$$

Tehát a megoldás:

$$f(x) = \Theta(x)e^{-x}\big(1 + x\big)$$

Ellenőrizhető, hogy ez a függvény kielégíti a megadott differenciál egyenletet és a megfelelő kezdőfeltételeket.

6. feladat:

(a) A

$$3f''(x) + 4f'(x) + f(x) = \delta(x) - 3\delta'(x)$$

egyenletből leolvasva az együtthatókat (a gyakorlaton használt jelöléssel):

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 1,\ m = 1,\ n = -3$$

Ezek alapján a kezdőfeltételek:

$$\left.\begin{array}{l} 3z'(0) + 4z(0) = 1 \\ 3z(0) = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z(0) = -1 \\ z'(0) = \frac{5}{3} \end{array}$$

A differenciál egyenlet $z(x)$-re:

$$3z''(x) + 4z'(x) + z(x) = 0$$

(b) Az eredeti egyenlet Fourier-transzformáltját véve:

$$\big(3(-is)^2 + 4(-is) + 1\big)\tilde{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(1 - 3(-is)\big)$$

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1 + 3is}{-3s^2 - 4si + 1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1 + 3is}{3(s + i)(s + i/3)} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\frac{3s - i}{3(s + i)(s + i/3)} =$$

$$= \frac{-i}{3\sqrt{2\pi}}\left[\frac{6}{s + i} - \frac{3}{s + i/3}\right]$$

Az inverz Fourier-transzformáció:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dse^{-isx}\tilde{f}(s) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dse^{-isx}\left(\frac{6}{s + i} - \frac{3}{s + i/3}\right)$$

Az integrált a Cauchy-féle integrálformulával értékeljük ki. Amennyiben $x < 0$ a kontúrt a felső félsíkon kell zárnunk ahhoz, hogy a félkör járuléka eltűnjön. Mivel a felső félsíkon az integrandus analitikus, az eredmény 0 lesz. Amennyiben $x > 0$, a kontúrt az alsó félsíkon kell zárnunk (ebben az esetben a görbe negatív irányítottságú):

$$f(x) = \Theta(x)\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint dse^{-isx}\left(\frac{6}{s + i} - \frac{3}{s + i/3}\right) = 2\Theta(x)\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint e^{-isx}\frac{1}{s + i}ds}_{-e^{-isx}|_{s=-i} = -e^{-x}} +$$

$$+\Theta(x)\underbrace{\frac{-1}{2\pi i}\oint e^{-isx}\frac{1}{s + i/3}ds}_{e^{-isx}|_{s=-i/3} = e^{-x/3}} = \Theta(x)\big(e^{-x/3} - 2e^{-x}\big)$$

Tehát a megoldás:

$$f(x) = \Theta(x)\big(e^{-x/3} - 2e^{-x}\big)$$

Ellenőrizhető, hogy ez a függvény kielégíti a megadott differenciál egyenletet és a megfelelő kezdőfeltételeket.

7. feladat:

(a) A

$$z'(x) + 3z(x) = e^{-x} \qquad\qquad z(0) = 1$$

egyenletből leolvasva az együtthatókat (a gyakorlaton használt jelöléssel):

$$a = 0,\ b = 1,\ c = 3$$

Ebből azonnal adódik, hogy:

$$n = az(0) = 0 \qquad m = az'(0) + bz(0) = 1$$

Azaz a megfelelő disztribúciós egyenlet:

$$f'(x) + 3f(x) = \Theta(x)e^{-x} + \delta(x)$$

(b) A disztribúciós egyenlet Fourier-transzformáltját véve:

$$\big(-is + 3\big)\tilde{f}(s) = \widetilde{\Theta(x)e^{-x}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Az inhomogén tag Fourier-transzformáltja:

$$\widetilde{\Theta(x)e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\Theta(x)e^{-x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{(is-1)x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(is-1)x}}{is-1}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-is} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{s+i}$$

Így $\tilde{f}(s)$ kifejezhető:

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{3-is} + \frac{i}{(i+s)(3-is)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{3i+s} - \frac{1}{(i+s)(3i+s)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{3i+s} - \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{3i+s} + \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{i+s}\right) = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{3i+s} + \frac{1}{i+s}\right)$$

Az inverz Fourier-transzformáció:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dse^{-isx}\tilde{f}(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dse^{-isx}\left(\frac{1}{s+i} + \frac{1}{s+3i}\right)$$

Az integrált a Cauchy-féle integrálformulával értékeljük ki. Amennyiben $x < 0$ a kontúrt a felső félsíkon kell zárnunk ahhoz, hogy a félkör járuléka eltűnjön. Mivel a felső félsíkon az integrandus analitikus, az eredmény 0 lesz. Amennyiben $x > 0$, a kontúrt az alsó félsíkon kell zárnunk (ebben az esetben a görbe negatív irányítottságú):

$$f(x) = \frac{1}{2}\Theta(x)\underbrace{\frac{-1}{2\pi i}\oint dse^{-isx}\frac{1}{s+i}}_{e^{-isx}|_{s=-i}=e^{-x}} + \frac{1}{2}\Theta(x)\underbrace{\frac{-1}{2\pi i}\oint dse^{-isx}\frac{1}{s+3i}}_{e^{-isx}|_{s=-3i}=e^{-3x}} =$$

$$= \frac{1}{2}\Theta(x)\big(e^{-x} + e^{-3x}\big)$$

Tehát a megoldás:

$$f(x) = \frac{1}{2}\Theta(x)\big(e^{-x} + e^{-3x}\big)$$

Ellenőrizhető, hogy ez a függvény kielégíti a megadott differenciál egyenletet és a megfelelő kezdőfeltételt.
A Green-függvény meghatározásához az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$G'(x) + 3G(x) = \delta(x)$$

Az egyenlet Fourier-transzformáltját véve:

$$\big(-is + 3\big)\tilde{G}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \rightarrow \qquad \tilde{G}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{3i+s}$$

Az inverz transzformációt elvégezve:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dse^{-isx}\tilde{G}(s) = -\frac{1}{2\pi i}\oint dse^{-isx}\frac{1}{s+3i} = \Theta(x)e^{-3x}$$

Az inhomogén egyenlet megoldásához a Green-függvényt konvolválnunk kell az inhomogén taggal, $g(x) = \Theta(x)e^{-x} + \delta(x)$-szel:

$$f(x) = \big(G * g\big)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(y)e^{-3y}\big(\Theta(x-y)e^{-(x-y)} + \delta(x-y)\big)dy =$$

$$= \Theta(x)e^{-x}\int_{0}^{x} e^{-2y}dy + \int_{0}^{\infty} e^{-3y}\delta(x-y)dy = \Theta(x)e^{-x}\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\right]_0^x + \Theta(x)e^{-3x} =$$

$$= \Theta(x)\left(\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-3x}}{2} + e^{-3x}\right) = \frac{1}{2}\Theta(x)\big(e^{-x} + e^{-3x}\big)$$

Azaz a Green-függvényes módszerrel is ugyanazt az eredményt kaptuk.