Gyakorló feladatok

1. feladat: Mutassuk meg, hogy egy X Hilbert térben tetszőleges $x, y \in X$ esetén $x \perp y$ akkor és csak akkor ha

$$||x - \alpha y|| = ||x + \alpha y||, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

2. feladat: Mutassuk meg, hogy egy X Hilbert térbeli (x_n) sorozatra $||x_n|| \to ||x||$ és $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ esetén $x_n \to x$ is teljesül.

3. feladat: A parallelogramma egyenlőség felhasználásával mutassuk meg, hogy

$$||z - x||^2 + ||z - y|| = \frac{1}{2}||x - y||^2 + 2||z - \frac{1}{2}(x + y)||^2.$$

4. feladat: Tekintsük az $X \equiv \{x(t) \in L^2[0,1] | x(0) = x(1)\}$ Hilbert teret ahol a skalárszorzat

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 \overline{x}(t) y(t) dt.$$

Legyen $x(t) \equiv t \in X$! Tudva, hogy $e_n(t) = e^{2\pi i n t}, n \in \mathbb{Z}$ egy X-beli totális ortonormált sorozatot alkot, a Parseval formula segítségével mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. feladat: Számoljuk ki az ℓ^2 térbeli normát az $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots) \in \ell^2$ elemre ha **1.** $\xi_k = 2^{-k/2}$ és **2.** $\xi_k = \frac{1}{k}$!

6. feladat: Legyen rögzített n esetén $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ egy X-beli ortonormált halmaz és $x \in X$ rögzített. Tekintsük az $y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ lineáris kombinációt ahol $\alpha_j \in \mathbb{C}$ változók. Ekkor $||x - y||$ mint egy komplex n változós $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ függvény áll elő. Mutassuk meg, hogy F minimális akkor és csak akkor ha

$$\alpha_j = \langle e_j, x\rangle, \qquad j = 1, 2, \ldots n.$$

7. feladat: Számoljuk ki a

$$p_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}[(t^2 - 1)^n] \in L^2[-1, 1]$$

polinomok $||p_n||$ normáját mint az n függvényét az $(L^2[-1,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert térben ahol

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt.$$

Segítség: Legyen $u(t) \equiv t^2 - 1$. Ekkor $p_n(t) = (u^n)^{(n)}$, ahol (n) a t-szerinti n-dik deriváltat jelenti. Figyeljük meg, hogy $(u^n)^{(j)}(\pm 1) = 0$ amennyiben $j = 1, 2, \ldots n-1$ és $(u^n)^{(2n)} = (2n)!$ Integráljunk n-szer parciálisan.

8. feladat: Bizonyítsuk be az alábbi, úgynevezett polarizációs identitást!

$$4\langle y, x\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle x + i^k y, x + i^k y\rangle$$

9. feladat: A polarizációs identitást felhasználva mutassuk meg, hogy ha U izometrikus operátor ($||Ux|| = ||x||$), akkor a skalárszorzatot is őrzi ($\langle Uy, Ux\rangle = \langle y, x\rangle$).

10. feladat: Mutassuk meg, hogy ha U ráképezés és őrzi a skalárszorzatot akkor U unitér.

11. feladat: Mutassuk meg , hogy az X Hilbert téren ható T korlátos lineáris operátorra igaz, hogy

$$||T|| = \sup_{||x||=1} |\langle x, Tx\rangle|$$

12. feladat: Tekintsük az $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert teret, ahol $X \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ és

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)} y(t) dt.$$

Tudjuk, hogy X-en az x_n sorozat ahol

$$x_n(t) = \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(t) e^{-t^2/2}$$

teljes ortonormált rendszert alkot (totális ortonormált sorozat). Legyen T az alábbi lineáris operátor

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t + \frac{d}{dt} \right)$$

mely a sorozat elemein az alábbi módon hat:

$$Tx_n = \sqrt{n} x_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \qquad Tx_0 = 0.$$

A Hermite polinomok tulajdonságainak felhasználásával igazoljuk ezt! Mi lesz a T adjungáltja és hogyan hat az x_n bázisvektorokon? Az adjungált ismeretében számoljuk ki az

$$\langle x_n, Sx_n \rangle$$

skalárszorzat értékét, ahol $S = -\frac{d^2}{dt^2}$!

13. feladat: Írja fel az

$$(1 - t^2) f'' - t f' + n^2 f = 0, \qquad t \in [-1, 1]$$

Csebisev egyenlet Sturm-Liouville alakját! Mi lesz a súlyfüggvény?

Számolja ki az

$$f_0(t) = 1, \qquad f_1(t) = t$$

polinomok normáját! Mutassuk meg, hogy ezek ortogonálisak!

14. feladat: A $[-1, 1]$ intervallumon ortogonális függvényrendszert alkotó polinomokat Legendre-polinomoknak nevezzük ($P_n(t)$). Az ortogonalitási reláció

$$\left\langle P_n, P_m \right\rangle = \int_{-1}^{1} dt P_n(t) P_m(t) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} ,$$

ahol δ_{nm} a Kronecker-delta.

(a) Számolja ki a fenti ortogonalitási relációval definiált polinomrendszer $P_2(t)$ és $P_3(t)$ elemeit, ha tudjuk hogy $P_0(t) \equiv 1$ és $P_1(t) = t$.

(b) A Legendre-polinomokat a $g(t,u)$ generátorfüggvénnyel is definiálhatjuk:

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)u^n \,,$$

tehát a generátorfüggvény u változóban vett Taylor-kifejtésének együtthatóiként. Kihasználva az ortogonalitási relációt, olvassa le a

$$\left\langle P_m, g(t,u)\right\rangle$$

skalárszorzat értékét! Ellenőrizze az eredményt az integrál explicit elvégzésével $m = 0, 1$-re!

(c) Számolja ki most a $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2$ Legendre-polinomokat úgy, hogy Taylor-sorba fejti a $g(t,u)$ függvényt!

15. feladat: Tekintsük a $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert teret ahol X az egységgömbön értelmezett kétváltozós a $\sin\theta d\theta d\varphi$ mértékre négyzetesen integrálható (gömb) függvények tere, és tekintsük a

$$T = -dE\cos\theta.$$

operátort ahol d és E pozitív valós konstansok!

(a) Számoljuk ki az alábbi skalárszorzatokat:

$$\langle Y_l^m, TY_{l'}^m\rangle \qquad l, l' \in \{1,2\}, \qquad m = 1$$

ahol

$$Y_1^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}, \qquad Y_2^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\varphi} \qquad !$$

(b) Legyenek A, B, C az X Hilbert téren ható lineáris operátorok ahol

$$C = A^*A + B(B-1).$$

Tudjuk azt is, hogy B és C önadjungáltak és az Y_l^m gömbfüggvények közös sajátfüggvényeik m illetve $l(l+1)$ sajátértékekkel. Végezetül azt is tudjuk, hogy

$$AY_l^m = N_l^m Y_l^{m-1}$$

ahol N_l^m egy normálási faktor. Határozzuk meg $|N_l^m|^2$-et!