n-dimenziós Euklideszi tér

<u>Hipersík</u> $H=\{\underline{x} \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c\}$ $\qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\langle \underline{h} | \underline{x} \rangle = c \in \mathbb{R} \qquad \underline{h} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

H^+ féltér $:= \{\underline{x} \mid \langle \underline{h} | \underline{x} \rangle \leq c\}$ (zárt féltér)

$H \subset H^+$

nyílt féltér $\{\underline{x} \mid \langle \underline{h}, \underline{x} \rangle < c\}$

H^- féltér $:= \{\underline{x} \mid \langle \underline{h} | \underline{x} \rangle \geq c\}$ zárt

Def: A P konvex poliéder az n-dimenziós Euklideszi térnek ha $P = \bigcap_{i=1}^{l} H_i^+$ úgy, hogy P korlátos $\exists$ n-dimenziós $G^n(R)$ gömb úgy, hogy $P \subset G^n(R)$ és nem üres a belseje, azaz $G^n(r)$ úgy, hogy $G^n(r) \subset P$.

Áll: A konvex poliéder konvex.

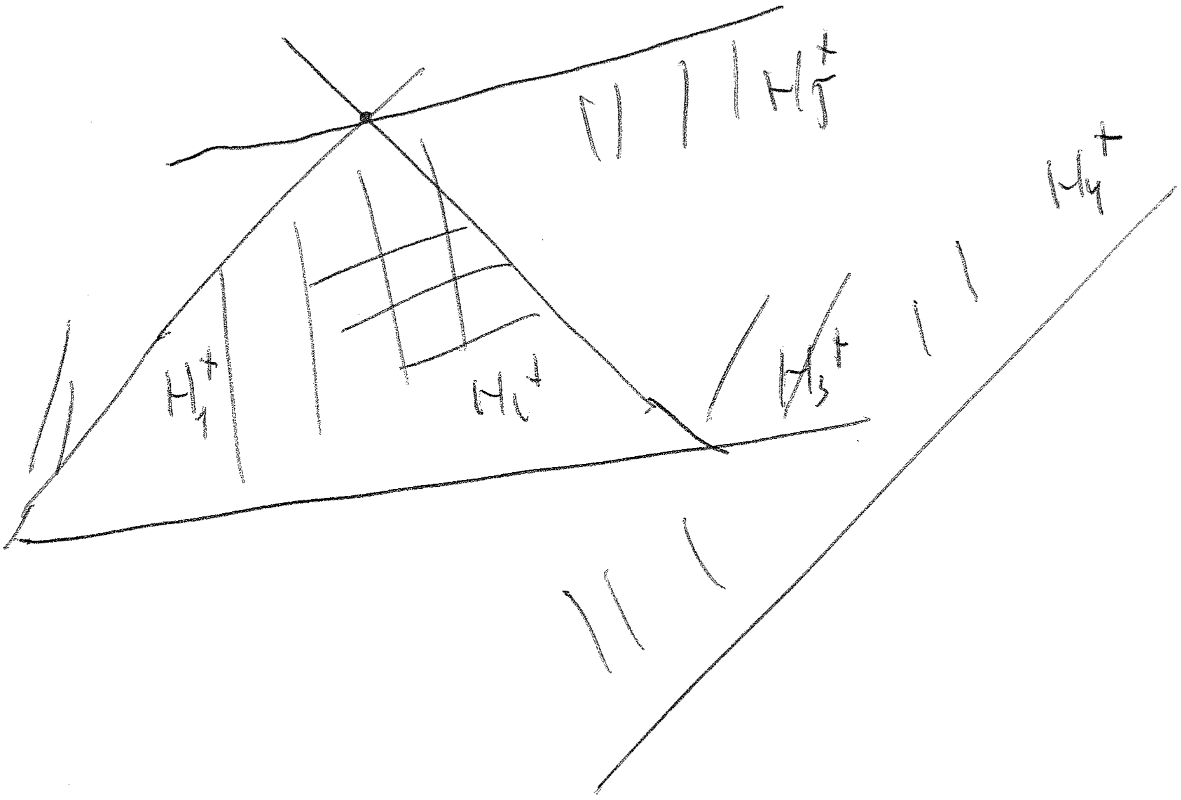
Biz: A H halmaz konvex, ha bármely 2 pontjával együtt az összekötő szakasz pontjait is tartalmazza. Ha $\underline{x}, \underline{x}' \in H$ akkor az összekötő szakasz pontjai $t\underline{x} + (1-t)\underline{x}'$ alakúak ahol $0 \leq t \leq 1$.

$\Rightarrow$ A féltér az konvex, mert $\underline{x}, \underline{x}' \in H^+$ akkor $\exists$ $\underline{h}$ normálvektor $\langle \underline{h} | \underline{x} \rangle \leq c$ $\langle \underline{h} | \underline{x}' \rangle \leq c$

$$\langle \underline{n} \mid t\underline{x} + (1-t)\underline{x}' \rangle = \underset{\substack{\geq \\ 0}}{t}\underset{\substack{\wedge| \\ c}}{\langle \underline{n} \mid \underline{x} \rangle} + \underset{\substack{\geq \\ 0}}{(1-t)}\underset{\substack{\wedge| \\ c}}{\langle \underline{n} \mid \underline{x}' \rangle} \leq t \cdot c + (1-t)c = c$$

$tx + (1-t)x' \in H^+$ ha x és $x' \in H^+$

Konvex halmazok metszete konvex $\Rightarrow$ a konvex poliéder konvex.



Def: Meghatározó egy feltétel, ha az elhagyásával a metszet "nő"
H_i^+ feltétel meghatározó

$$\bigcap_{j \neq i} H_j^+ \supsetneq \bigcap_{j=1}^{l} H_j^+ ,$$ itt a i-ik [illegible] van

Minden meghatározó feltétellel adjuk meg a P konvex poliédert

Áll: Ha H_i^+ a P poliéder meghatározó féltere, akkor a $H_i \cap P$ egy $(n-1)$-dimenziós konvex poliéder

H_i^+ féltér határoló lapja

Mj: A "dimenzió n" a konvex poliéder definíciójában ott követelhető, ha 'n-dimenziós' golyót megadunk a definícióban

Def. (A lap fogalmának szigorítása a konvex n-dimenziós poliédernél) 1, Az n-dimenziós lap maga P

2) Az $(n-1$-dimenziós) lapok azok a konvex poliéderek, melyek $H_i \cap P$ alakban állnak elő, valamely H_i meghatározó féltér határoló lapjaként

3) Az $(n-1)$-dimenziós lapok $(n-1)-1$ dimenziós lapjai a P poliéder $(n-2)$-dimenziós lapjai

4) Indukció lefelé $\rightsquigarrow$ egy-dimenziós lapokat P éleinek nevezzük, az 0-dimenziós lapok a P csúcsai. ($v_1, \dots, v_5 \in \mathbb{E}^n$ a P poliéder csúcsai)

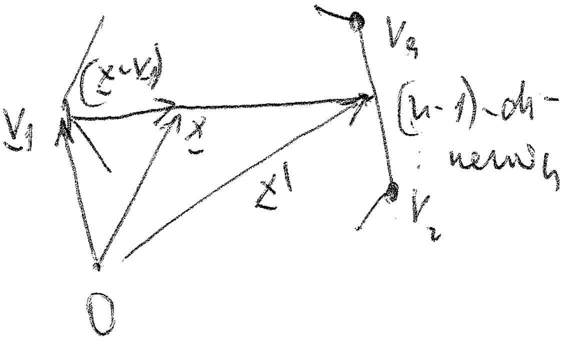
T: Az P n-dimenziós konvex poliéder a csúcsainak konvex burka.

Biz: A dimenzióra vonatkozó indukció

0-dimenzióban 1-dimenzióban az állítás triviális.

T.f.h. ~~hogy~~ (n-1)-dimenzióban ~~igaz~~ a igaz az állítás és legyen P n-dimenziós korlátos poliéder $\underline{x} \in P$, úgy hogy x a P belsejében (azaz nem tartozik egy meghatározó féltér határoló hipersíkjára sem)

$\Rightarrow v_1 \in P$ csúcs $\underline{v}_1 \neq \underline{x}$ és be tekintjük a $\underline{v}_1$-ből induló $\underline{x}$-en áthaladó félegyenest és egy x' pontban metszi valamelyik (n-1)-dimenziós lapot is, mert ha ez nem történne a teljes félegyenes a P-re esne lemma ($[\underline{v}_1, \underline{x}] \subset P \Leftarrow (\underline{v}_1, \underline{x}] \subset \operatorname{int} P$ P korlátossága miatt $\Rightarrow \underline{x}'$ $(\underline{v}_1\, \underline{x}\, \underline{x}')$ sorrendben áll fenn $\underline{x}' \neq \underline{x}$.)



$$\underline{x}' = \underline{v}_1 + \underset{\geq 0}{t}(\underline{x} - \underline{v}_1) \Rightarrow t \geq 1$$

$$\underline{x}' = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v_i \qquad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \sum_{i=2}^{k} \alpha_i = 1$$

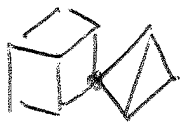
← indukciós feltevés

$$\underline{v}_1 + t(\underline{x} - \underline{v}_1) = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \underline{v}_i$$

$$\underline{x} = \underset{\geq 0}{-\frac{1-t}{t}} \underline{v}_1 + \underset{\geq 0}{\frac{1}{t}} \sum_{i=2}^{k} \underset{\geq 0}{\alpha_i} \underline{v}_i = \underset{\geq 0}{\frac{t-1}{t}} \underline{v}_1 + \sum_{2}^{k} \underset{\geq 0}{\frac{\alpha_i}{t}} \underline{v}_i$$

$$\frac{t-1}{t} + \frac{\overset{1}{\overset{\|}{\sum d_i}}}{t} = \frac{t-1}{t} + \frac{1}{t} = 1 \quad \text{konvex kombináció}$$

Def: Általános poliéder a n-dimenziós tér konvex poliédereinek véges uniója (összefüggő)



n-dimenziós szabályos poliéderek

Def: A P poliéder szimmetriacsoportja $\Gamma(P)$ tartalmazza, azokat az φ egybevágóságokat a n-dimenziós Euklideszi térnek, melyekre $\varphi(P) = P$

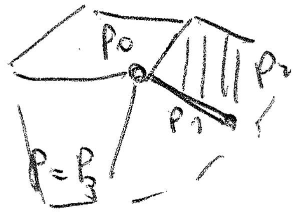
olyan él, melynek egyik vége P_0

Def: A P poliéder egy zászlója $Z = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n\}$

poliéder csúcsa

2-dimenziós lap, amely éle a P_1

$P_n = P$ ($\forall i$ $\dim P_i = i$ és $P_i \subset P_{i+1}$)



Def: A P konvex poliéder ~~szabályos~~ szabályos, ha a szimmetriacsoportja tranzitív hat a zászlói halmazán, azaz ha Z_1, Z_2 a P két zászlója $\Rightarrow \exists \varphi \in \Gamma(P)$ $\varphi(Z_1) = Z_2$ (tranzitív)

$Z_1 = \{F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}, F_n''^{P}\}$ $\quad Z_2 = \{F_0', F_1', \ldots, F_{n-1}', F_n''^{P}\}$

$\varphi(F_i) = F_i'$ $\quad i = 0 \ldots n$

Mj: Itt igazából egyszerre kommutatív a háló, tehát a fenti φ tulajdonsági egyértelmű.

T: Az n-dimenziós szabályos poliéderek igazak az alábbiak

1) Írható köré gömb (azaz $\exists$ olyan pont a térben, amitől a csúcsai egyenlő távolságra vannak)
2) A lapjai $(n-1)$-dimenziós szabályos poliéderek és egymással egybevágók
3) A csúcsalakzatai szintén egybevágó $(n-1)$-dimenziós szabályos poliéderek

Def: Ha $\underline{v}$ egy csúcs és $\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_k$ olyan csúcs P-ben, melyekre $[\underline{v}, \underline{v}_1], [\underline{v}, \underline{v}_2], \ldots [\underline{v}, \underline{v}_k]$ épp a $\underline{v}$-be illeszkedő élek, akkor a $\underline{v}$-hez tartozó csúcsalakzat

$$\operatorname{conv}\{\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_k\} = \{\underline{x},\ \underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i \quad \alpha_i \geq 0 \text{ és } \sum \alpha_i = 1\}$$

Biz: 1) Legyen s a P poliéder súlypontja, ha $\{\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_5\}$ a csúcsai $\underline{s} := \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \underline{v}_i$

Áll: A súlypont a köré írható gömb középpontja

Bz: Az $\underline{s}$ legyen egy $\varphi \in \Gamma(P)$ minimalizáló súlyát meg je. $\varphi(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{t}$ A egy ortogonális mátrix a $\underline{t}$ egy eltolásvektor.

$$\varphi(\underline{s}) = A(\underline{s}) + \underline{t} = A\left(\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma} v_i\right) + \underline{t} = A\left(\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma} v_i\right) + \frac{1}{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{\sigma} \underline{t}\right) = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma} A v_i + \frac{1}{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{\sigma} \underline{t}\right) = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma}(A\underline{v}_i + \underline{t}) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma} \varphi(\underline{v}_i) = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{\sigma} v_i = \underline{s}$$

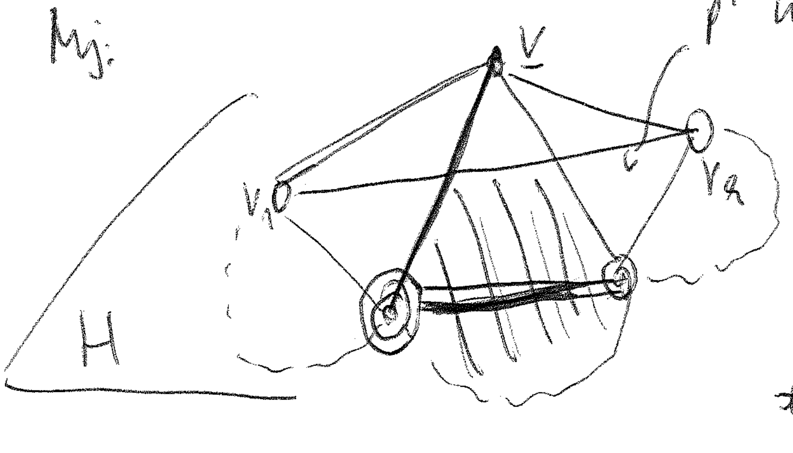
$(v_1 \ldots v_\sigma)$ halmaz egy permutációját adja φ

$|\varphi(\underline{s}) - \varphi(\underline{v})| = |\underline{s} - \varphi(\underline{v})|$ u. akkor teljesül v'

v min hiszen $\exists\ \varphi$ (tranzitív halmaz miatt)

$\varphi(\underline{v}) = \underline{v}'$ $\Rightarrow$ v min $\underline{s}$-től ugyanaz távolsága van.

Mj:



p' mindenkori egy másik vagy oldalon lesz a $\underline{V}$-to ... valamely ... a ... H hipersíkon ~~...~~. A ... egy 2-dimenziós $\underline{V}$-t tartalmazó lap melletti a H-val $\leadsto$ A Z_v ... a $\underline{V}$-hez tehát csúcsalakzat egy zászlója a csúcsalakzat H-hipersíkkal vett metszetét adva

$$Z_{\underline{v}} = \underbrace{\{\overset{v}{\overset{\|}{F_0}}, F_1, \dots F_n\}}_{(n+1 \text{ elemű})} \rightsquigarrow \underbrace{\{F_1\cap H, F_2\cap H, \dots, F_n\cap H\}}_{n\text{-elemű}} =: Z_v'$$

zászló P'

Mj: Ha egy n-dimenziós konvex poliéder teljesíti 1)-t 2)-t 3)-t az előző tétel feltételeiből, akkor ő szabályos a szabályosság definíciója szerint is.

Def: A szabályos poliéder <u>mintázatát</u> a dimenzió szerinti indukcióval definiáljuk.

1) A ~~nk~~ szabályos sokszög mintázata az oldalszámával $\{n\}$ (n-oldalú szabályos sokszög)

2) $(n-1)$-dimenziós szabályos lapok mintázata (azaz, egy tetszőleges csúcsnál álló $(n-2)$ dim. csúcsalakzat) az n-dimenziós szabályos test mintázata $\{r_1, r_2, \dots r_{n-1}\}$, ahol

$r_1 :=$ 2-dimenziós lapok mintázata

$\{r_2, \dots r_{n-1}\}$ pedig a csúcsalakzat mintázata

Mj: A szimbólum jele $\sigma(P)$

Pl: A 3-dimenziós szabályos poliéderek szimbóluma két elemű $\{r_1, r_2\}$

2-dimenziós lapok oldalszáma

csúcsalakzat oldalszáma

Def: A szabályos poliéder paramétere

$$\varrho(P) := \left(\frac{l}{2r}\right)^2$$

, ahol l az élhossz, r pedig a köré írható gömb sugara.

L: Ha P szabályos poliéder, P' a csúcsalakzata ((n-1)-dimenziós szabályos poliéder), r_1 a P szimbólumának első eleme (2-dimenziós lapok oldalszáma),

$$\varrho(P) = 1 - \frac{\cos^2\frac{\pi}{r_1}}{\varrho(P')}$$