$$f(\underline{x}) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y - 4 = 0 \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}^T \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \tilde{x} = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sajátérték – sajátvektor $\quad A\underline{x} = \lambda_{1,2}\underline{x} \quad \rightsquigarrow s_1, s_2 \rightsquigarrow s_1^0, s_2^0$

$$B = (\underline{s}_1^0, \underline{s}_2^0) \qquad (A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0} \;\; (\underline{x} \neq \underline{0}) \qquad \det(A - \lambda E) = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0 \qquad \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad x + y = \frac{3+\sqrt{5}}{2}x \qquad y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \qquad s_1^0 = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \qquad |s_1| = \sqrt{1 + \frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$$

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \qquad s_2^0 = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} & \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \\ \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \qquad D = f(\underline{t}) \qquad \underline{t} = -A^{-1}\underline{b} \qquad \boxed{A\underline{t} + \underline{b} = 0} \Downarrow \underline{t} = -A^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{t} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x = -2 \\ y = 0 \end{matrix}$$

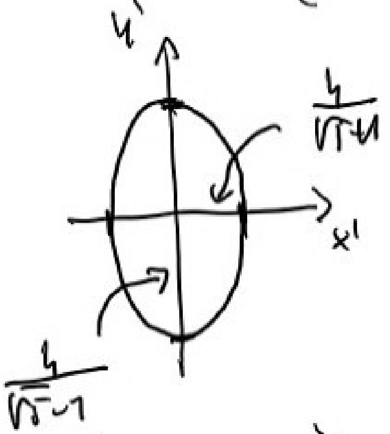
$$\boxed{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}y^2 = 4}$$

$$D = f(\underline{t}) = 4 + 0 + 0 - 4 + 0 - 4 = -4$$

x', y' koordinátarendszerben

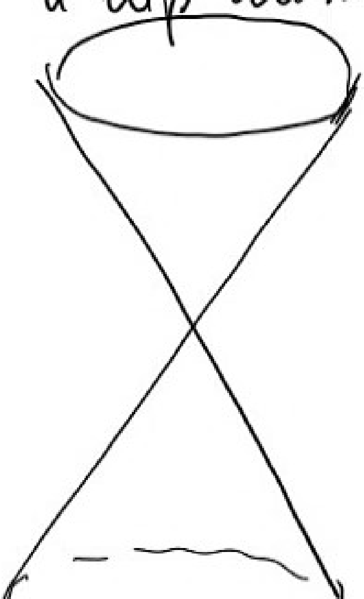
$$\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}}}\right)^2 = 4 \qquad \left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{8\cdot 2}{6+2\sqrt{5}}}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{\frac{16}{6+2\sqrt{5}}}}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x'}{\frac{4}{\sqrt{5}+1}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\frac{4}{\sqrt{5}-1}}\right)^2 = 1$$

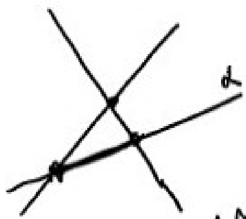


Térbeli definíció (kúpszeletek)

Def.: Kettős körkúp síkmetszete, mely nem megy át a kúp csúcsán

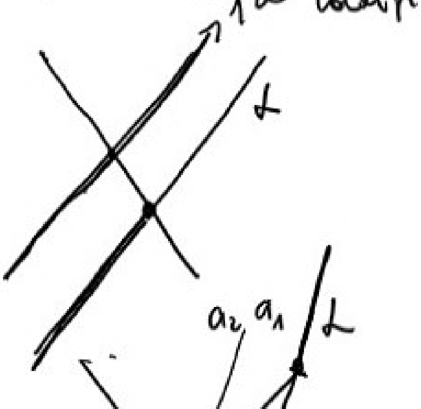


1) Összes alkotót metszi:



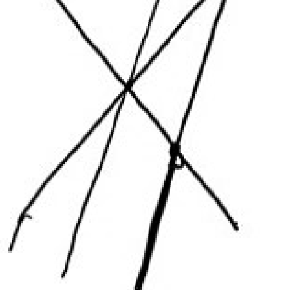
ellipszis

2)



parabola

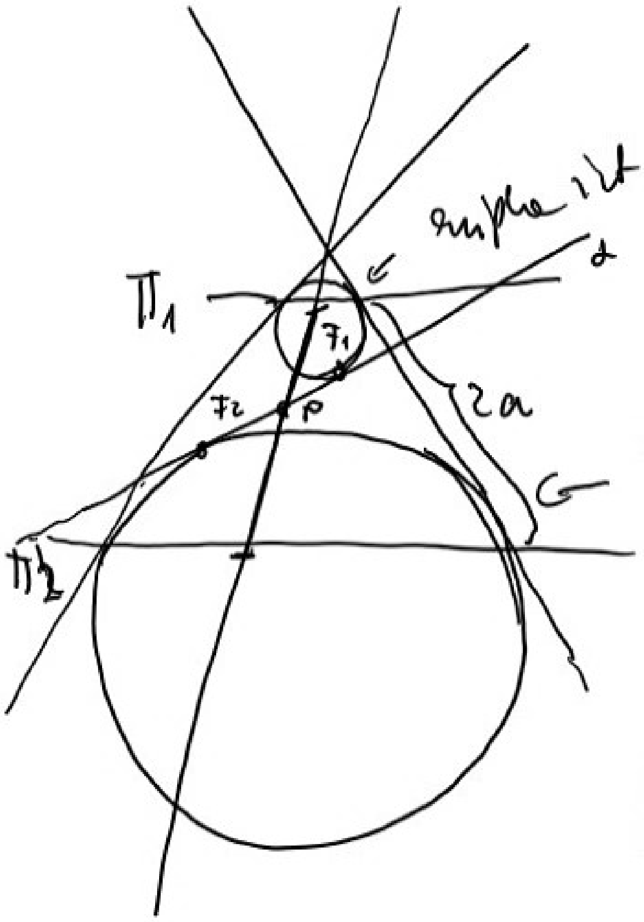
3)



hiperbola

A metszet teljesíti a fókális definíciót, ugyanis pontosabban tárgyalva, megelőzve

1) 2 adott F_1, F_2 ponttól mért távolság összege állandó



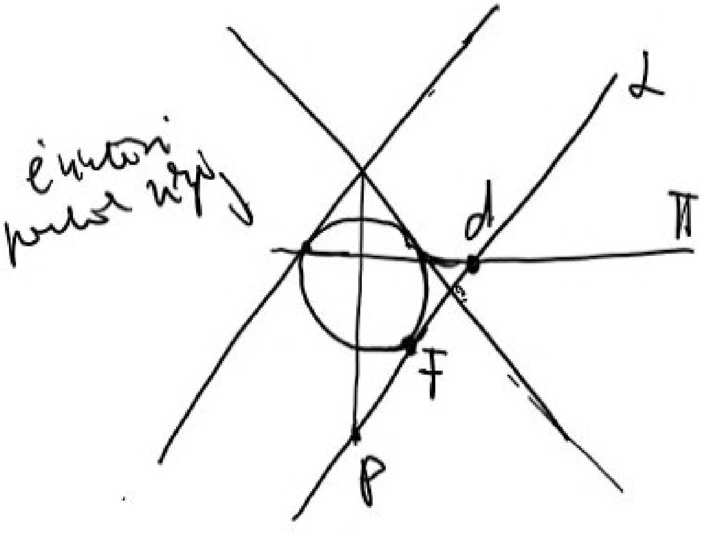
érintő gömb, ami érinti α-t F_1-ben

érintő gömb F_2-ben érint

P: egy alkotó metszete α-val ⇒

$|PF_1| + |PF_2| = 2a$

2)



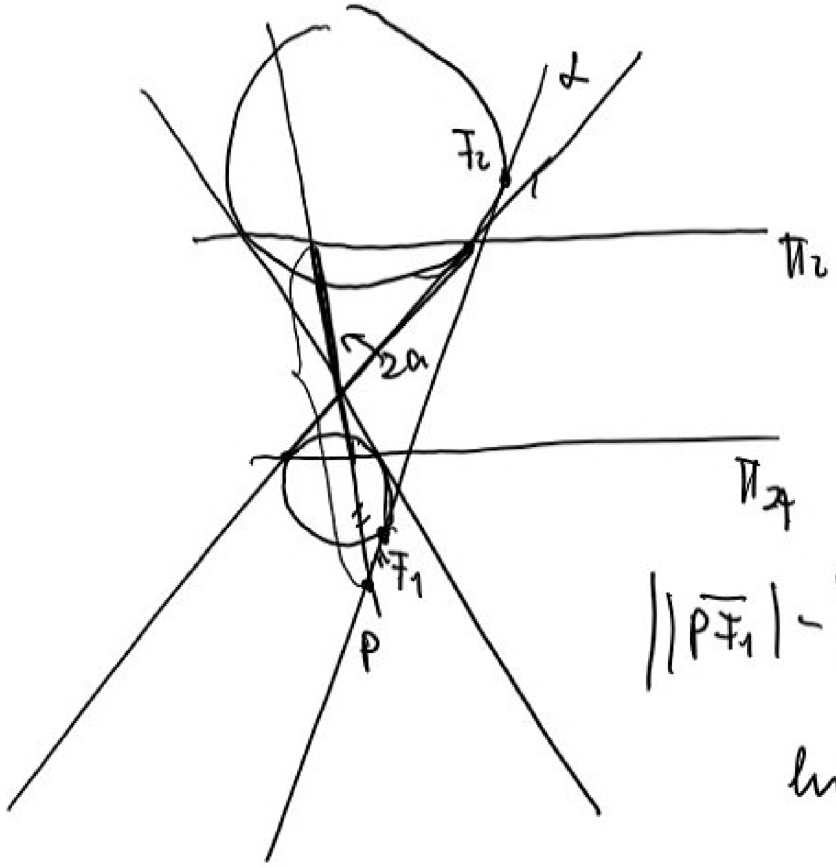
1 gömb írható a fenti módon a kúpba

1 F-pont adódik

ha α és Π metszete d akkor

$\rho(P, d) = (P, F)$ független a P-től (parabola)

3)



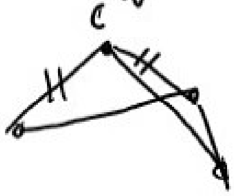
$$\big||PF_1| - |PF_2|\big| = 2a$$

hiperbola

Megj: Általános a fenti szerkesztési a vezéregyenes és 1 fókusz segítségével adott definíció megadására is: kúpszelet azon pontok halmaza lesz a síkon, melyek egy adott ponttól és egy adott egyenestől mért távolságainak az aránya állandó, ha ez az arány 1-nél kisebb akkor ellipszis, ha egyenlő egy parabola és ha 1-nél nagyobb akkor hiperbola a mértani hely.

Szabályos poliéderek

1, Szabályos sokszögek: konvex sokszög, melynek az oldalai egyenlő hosszúak és a szögei egyenlőek



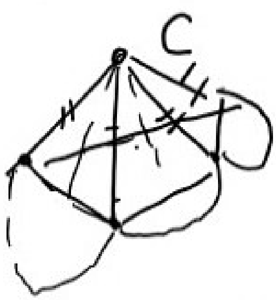
Ha C egy csúcs a C-szomszédjait összekötő átlót, csúcsalakzatnak nevezzük, akkor

Def: A konvex sokszög szabályos, ha az oldalai egybevágó szakaszok és a csúcsalakzatai szintén egybevágó szakaszok.

{n}   az n: oldalszám a sokszög melyikkel egy elemet tartalmaz a "2-dimenziós lapjainak oldalelemeit"

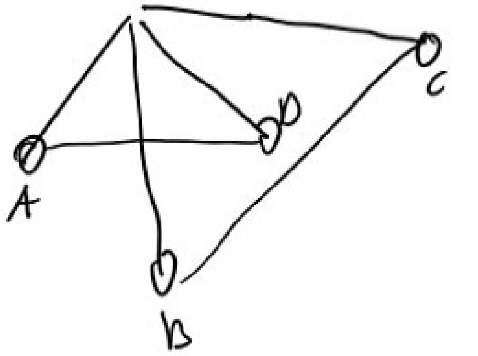
2) Szabályos poliéderek 3-dimenzióban

Def: konvex poliéder, szabályos sokszög lapokkal, amelyek egybevágóak és szabályos egybevágó csúcsalakzatokkal,



Def: Csúcsalakzat a C csúcs a C-vel szomszédos csúcsok konvex burka.

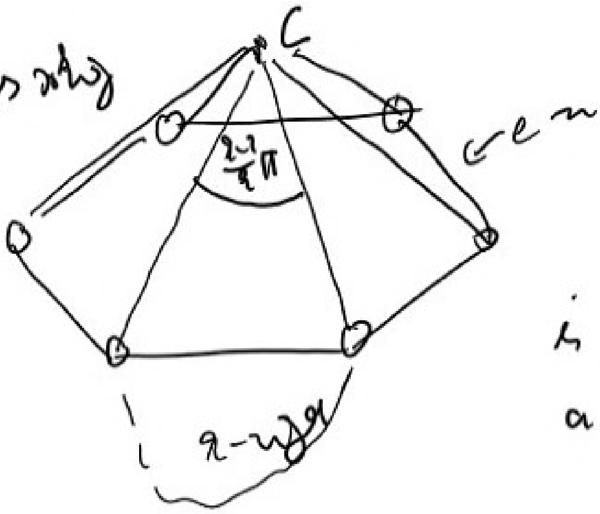
Mj: A csúcsalakzat lehet poliéder D nem feltétsorúj.



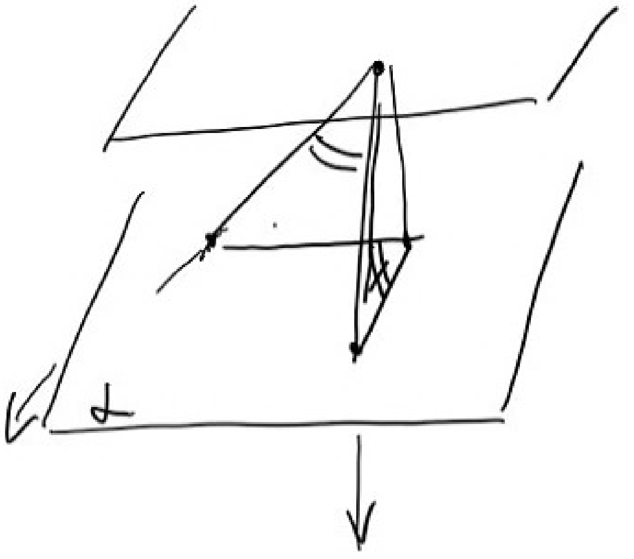
Az AD, BC oldalak ill. lehetnek kitérők

Def: A konvex poliéder szabályos, ha egybevágó szabályos sokszögek a 2-dimenziós lapjai, és egybevágó szabályos sokszögek a csúcsalakzatai

n-oldalú szabályos sokszög szöge $\frac{n-2}{n}\pi$



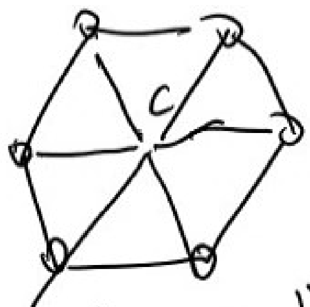
a csúcsalakzat oldalai 'l' és alkotó 'n'-szögek a poliéder lapjait



Áll. ha a szög mindkét ágát vízszintes sík alatt félsíkokkal metszettük a szög szárai, akkor a szög vetülete egy vízszintes síkra a szögnél nagyobb szöget eredményez

A C-nél levő szögek összege $l \cdot \frac{q-2}{q}\pi$. A csúcsalakzat síkjába vetítve ezek a szögek csökkennek és a vetületek ~~2π-t~~ összege 2π. ⇒ Az 'l' értéke ha 6-t akkor a 6 db 60°-os van ott a 360°-t ebben az esetben a C-ben lévő 3-szög lapok a csúcsalakzat síkjába esnek

⇒ $l \leq 5$ és akkor az l-értéke legalább 3 (mert legalább 3 lap



találkozik ∀ csúcsban) ⇒ $\boxed{l=3}$ $3 \cdot \frac{q-2}{q}\pi < 2\pi$

$3q-2q < 6$ ⇒ $q < 6$, de $q \geq 3$ ⇒

~~$\{5,3\}$~~ ~~$\{5,4\}$~~ ~~$\{$~~

(↑ csúcsalakzat oldalak, ↑ 2-dimenziós lapoldalszám)

$\{3,5\}$ $\{3,4\}$ $\{3,3\}$

(↑ csúcsalakzat, ↑ 2-dimenziós lap oldala)

$\boxed{l=4}$ $\{4,3\}$

$4\frac{q-2}{q}\pi < 2\pi$ $2q < 8$ $q < 4$ $q \geq 3$

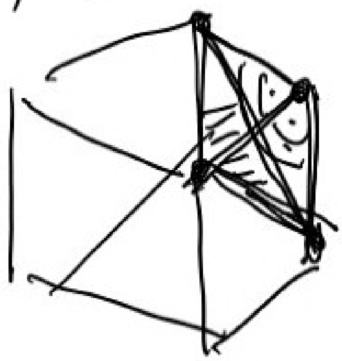
$\boxed{l=5}$ $\{5,3\}$

$5\frac{q-2}{q}\pi < 2\pi$ $3q < 10$ $q < \frac{10}{3}$ ⇒ $q=3$

<u>A realizálás kérdése</u>: A kombinatorikus típusok közül mi realizálható mint szabályos poliéder

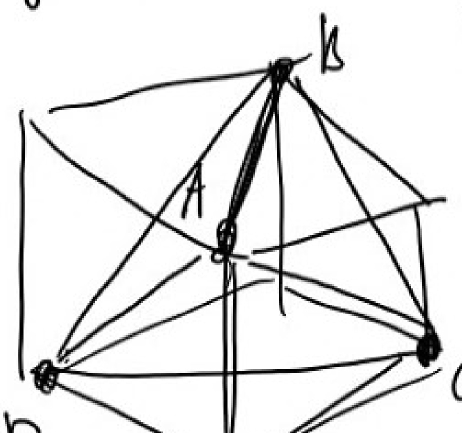
Mind az öt (Platóni testek)

$\{3,4\}$ kocka $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \le x, y, z < 1 \right\}$



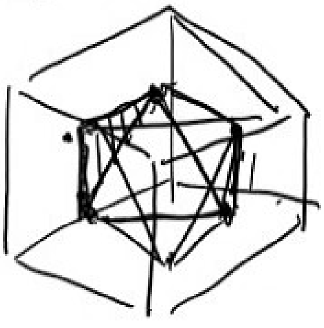
ennyi elemet szabályos 3-szög lapú négyzetes

$\{3,3\}$ szabályos tetraéder



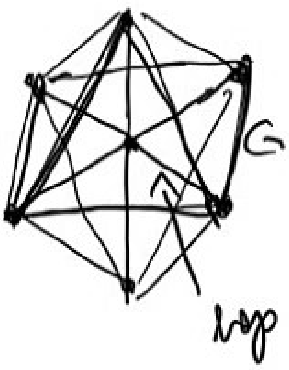
$\{AB, CD\}$ amely ... ∀ él egy kocka lapátló, ∀ lap 3 lapátló által meghatározott szabályos háromszög és ∀ csúcsa-között egy lap (A szemközti a $\triangle BCD$)

$\{4,3\}$



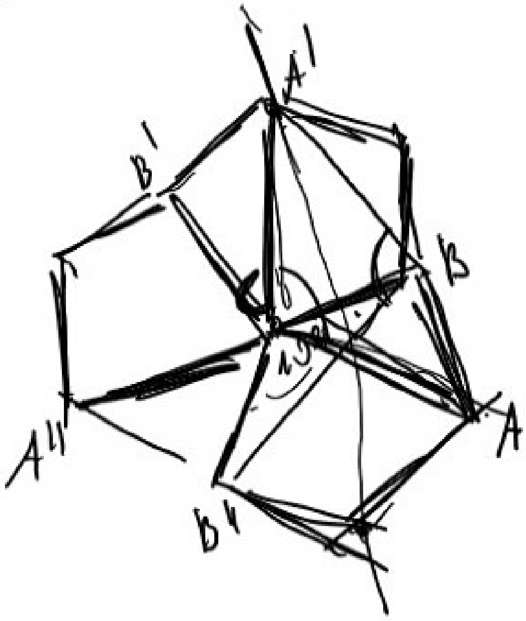
lapközepek 4-est A lapok szabályos 3-szög oktaéder

Az oktaéder (kereszt-politóp) mint konvex burok



$\mathrm{conv}\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\{3,5\}$ dodekaéder



Szabályos ötszög szöge $\frac{3}{5}\pi = \frac{3 \cdot 180}{5} = 108 < 120$

ezért lehet illeszteni

Állítás: CA, CA', CA'' páronként merőlegesek a térben

és egyúttal konvex. Biz.: $ACA'\sphericalangle = B''BA'\sphericalangle$-el

mert $\overline{CB}$ szakaszfelező merőleges síkjára tükrözve a $ACA'\sphericalangle$-et $AC \to BB''$, $CA' \to A'B$. És

$BA' \parallel CB'$ (szabályos 5-szög átlója párhuzamos egy oldallal) és $B'C$ nem kerülhet a BB'' szakaszfelező merőleges síkjára ([illegible] miatt)

$\Rightarrow B'C \perp BB'' \Rightarrow B''BA'\sphericalangle = \frac{\pi}{2} \Rightarrow CA \perp CA'$

u.így $\perp CA''$-re is.