Inhomogén alak : $\underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + c = 0$

$$0 = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{b}^T & c \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} B & \underline{t} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array} \right)$$

← általános bázisban mátrix homogén koordinátás felírása, ahol a a lineáris

Inhomogén komponensnek felel meg $\underline{x}' = B\underline{x} + \underline{t}$

$$\underline{x}_{régi} = B\,\underline{x}_{új}$$

$$\underline{x}_{régi} = \underbrace{x_1}\,\underline{b}_1 + x_2\,\underline{b}_2 + \dots + x_n\,\underline{b}_n$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_3 \end{pmatrix}$ a koordinátái a vektornak, mégis

-2-

$x_r = Bx_{uj}$

Ha B orto. bázist ortonormáltba viszi, akkor B ortogonális mátrix, B oszlopvektorai páronként merőlegesek és egységnyi hosszúak $\Rightarrow$ $\boxed{B^T B = E}$

$$B^T = B^{-1}$$

Áll: Ha az A szimmetrikus $A^T = A$ $\Rightarrow$ $\exists\, B$ ortogonális mátrix, hogy $B^T A B$ diagonális és a főátlóban az A $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ saját értékei állnak. B oszlopai egységnyi hosszú sajátvektorai A-nak ($A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ megoldásai valamilyen λ-ra ~~értékkel~~ a sajátvektorok)

$$0 = \left(\begin{array}{c|c} B^T & \underline{0} \\ \hline \underline{t}^T & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{b}^T & c \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & \underline{t} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B^T & \underline{0} \\ \hline \underline{t}^T & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} AB & A\underline{t} + \underline{b} \\ \hline \underline{b}^T B & \underline{b}^T \underline{t} + c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B^T A B & B^T A \underline{t} + \dots \\ \hline \underline{t}^T A B + \underline{b}^T B & f(\underline{t}) \end{array}\right)$$

$$f(\underline{t}) := \underline{t}^T A \underline{t} + \underline{t}^T \underline{b} + \underline{b}^T \underline{t} + c = \underline{t}^T A \underline{t} + 2\underline{b}^T \underline{t} + c \qquad (f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + c)$$

B válasszuk a főtengelytételbeli ortogonális mátrixnak

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & B^T(A\underline{t}+\underline{b}) \\ 0 & & \lambda_n & \\ \hline & (B^T(A\underline{t}+\underline{b}))^T & & f(\underline{t}) \end{array}\right)$$

? $t_{régi}$ ahhoz hogy a utolsó oszlopban sok nulla legyen

$\boxed{t_{régi} = B t_{új}}$ $\quad B = [s_1, \ldots, s_n]$ $\quad s_i$ az A-nak λ_i-hez tartozó egységnyi sajátvektora.

$$[\underbrace{B^T(A t_{régi} + b_{régi})}_{t_i}]_i = [\underbrace{B^T A B}_{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}} t_{új} + \underbrace{B^T B}_{E} b_{új}]_i = \lambda_i (t_{új})_i + (b_{új})_i$$

$\lambda_i \neq 0 \Rightarrow \boxed{(t_{új})_i := -\dfrac{(b_{új})_i}{\lambda_i}}$

$\lambda_i = 0 \Rightarrow$ $\quad \underline{t_{régi} = B^{-1} t_{új} = B^T t_{új}}$

A mátrix legegyszerűbb általános alakja:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & t_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_n & t_n \\ \hline t_1 & \ldots & t_n & f(t) \end{array}\right)$$ ahol $\lambda_i t_i = 0$

$\boxed{n=2}$ **<u>másodrendű görbék</u>**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & t_1 \\ 0 & \lambda_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & f(t) \end{pmatrix}$$

i) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (kompatibilis $\lambda_1, \lambda_2 < 0$)

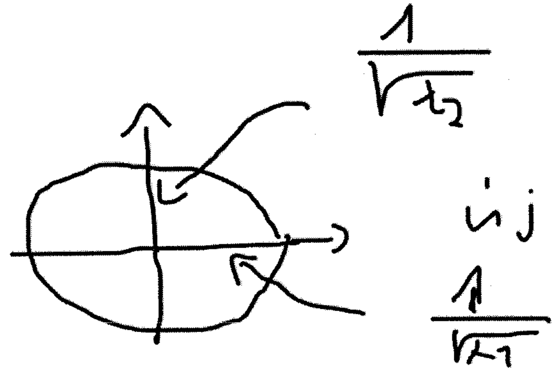
$\Downarrow$

$t_1 = t_2 = 0$ $\quad f(t) = D$ $\quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underset{>0}{\lambda_1} x^2 + \underset{>0}{\lambda_2} y^2 + D = 0$

a) $D > 0$ $\quad \emptyset$ a megoldás

b) $D = 0$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – " –

c) $D < 0$ $\quad$ <u>ellipszis</u>



új koordinátarendsz.

ii) $\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 \\ 0 & t_2 & D \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 x^2 + 2t_2 y + D = 0$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(x, y, 1)$

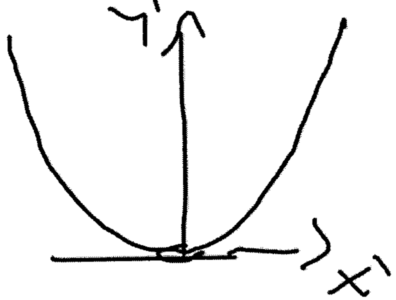
újabb bázisra $\quad x' = x \quad y = y' - \frac{D}{2t_2}$ ha $\boxed{t_2 \neq 0}$

$\Rightarrow \lambda_1 x'^2 + 2t_2 y' = 0$ akkor az egyenlet

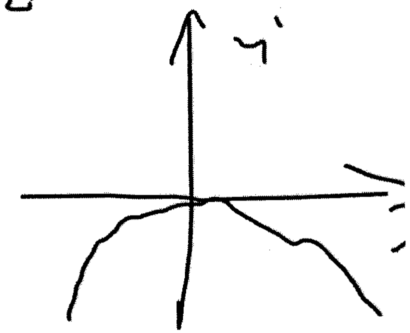
$t_2 < 0$

$\lambda_1 x'^2 = -2t_2 y'$

$y' = -\frac{\lambda_1}{2t_2} x'^2$ parabola



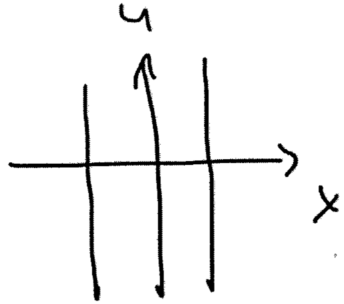
$t_2 > 0$



$t_2 = 0$ $\qquad \lambda_1 x^2 + D = 0$

$D < 0$

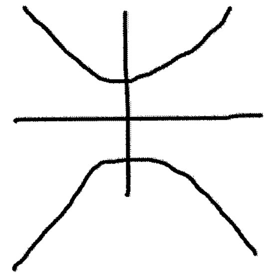
$x^2 = -\dfrac{D}{\underset{0}{\lambda_1}} > 0$ $\Rightarrow$ párhuzamos egyenespár



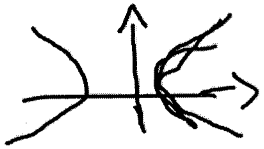
$D = 0$ $\qquad x = 0$ kettős egyenes

$D > 0$ $\qquad \emptyset$

1) $\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 < 0$ $\qquad \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + D = 0$ $\xrightarrow{D>0}$



$D < 0$ hiperbola



$D = 0$

$\lambda_1 x^2 = -\lambda_2 y^2$ metsző egyenespár $\quad y = \pm\sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}\, x$

iv) $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0$

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & t_2 \\ t_1 & t_2 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x, y, 1)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1 x + t_2 y + D \end{pmatrix} = 2t_1 x + 2t_2 y + 1$$

$$2t_2 y = -2t_1 x + D \xrightarrow{t_2 \neq 0} \text{egyenes}$$

$\Downarrow t_2 = 0$

Függőleges egyenes

Kész

Feladat: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y - 4 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sajátértékek problémára megoldása

$$A\underline{x} = \lambda \cdot \underline{x} \Rightarrow (A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$0 = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 1 - 3\lambda + \lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$