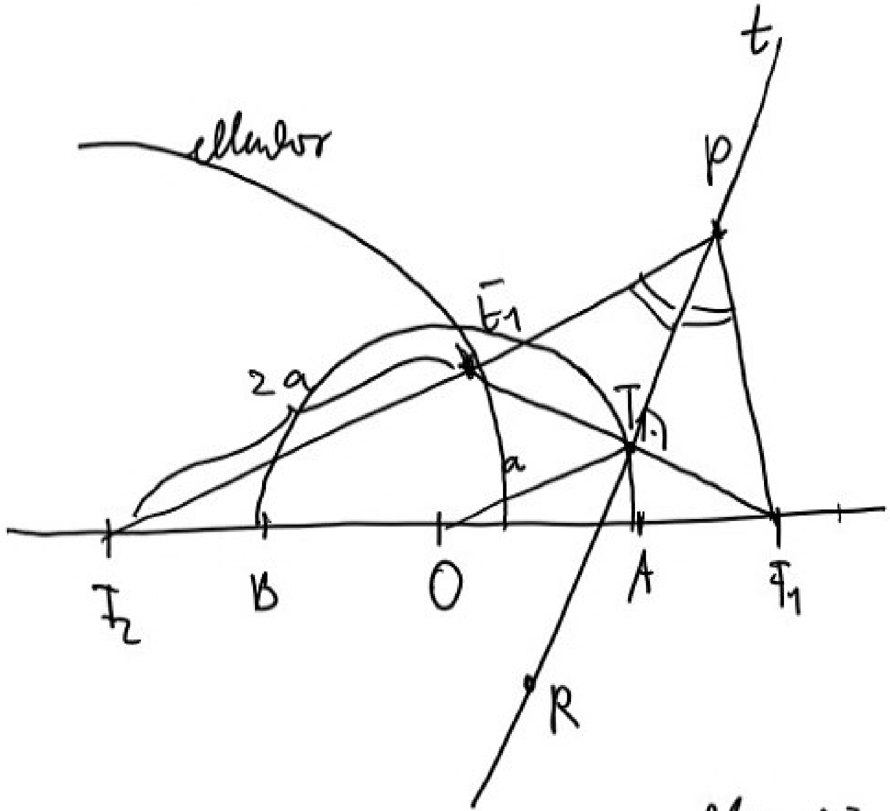
Hiperbola alapábrája

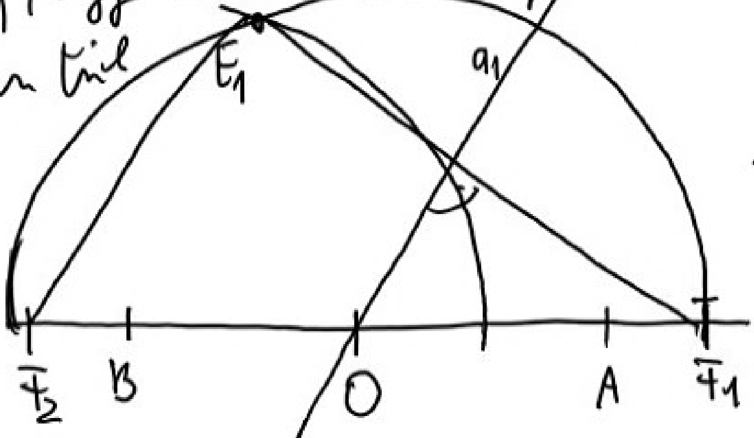
Def.: $\{P \mid ||PF_1| - |PF_2|| = 2a\}$



E_1 pontra merőleges érinti a ; ellenkör

O középű A-n átmenő kör : főkör

Feladat: Szerkesszünk érintőket a hiperbolához úgy, hogy azok a O ponton menjenek keresztül

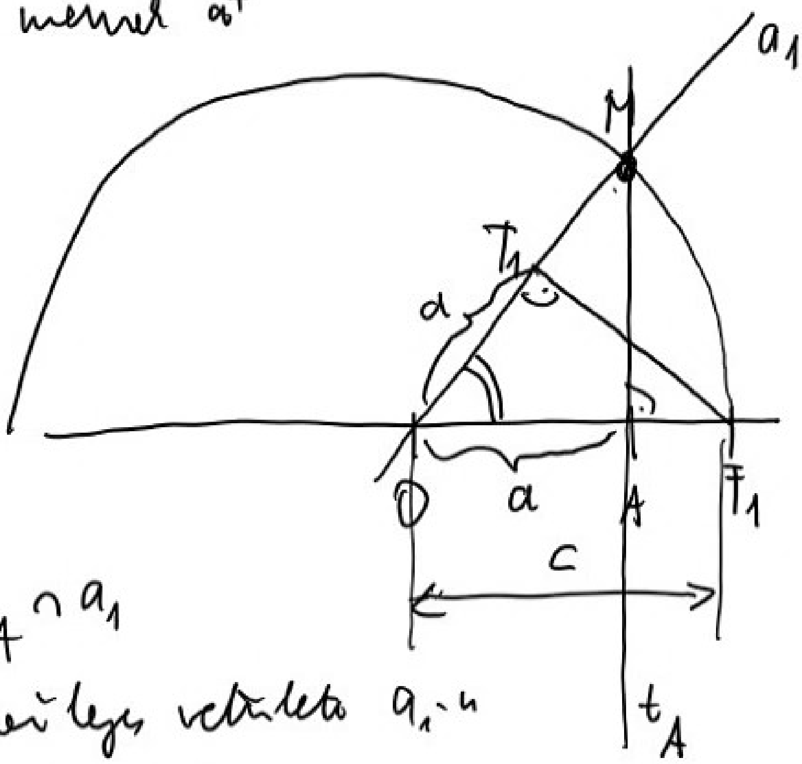


Szerk. menete
- O középű F_1-en áthaladó kör
- Metszéspontja az F_2 középű ellenkörrel E_1, E_2
- a_1, a_2 érintők az E_1F_1, E_2F_1 merőleges felező egyenesei
- Thalész tétel => $F_2E_1 \perp F_1E_1$, $a_1 \perp F_1E_1$ ...

Def: A hiperbola aszimptotái az O-ból nevezetes egyenesek a_1, a_2

Áll: Az a_1 aszimptota, az O középpontú F_1-en áthaladó kör és az A pontbeli érintő 1 közös pontján megy át

Biz.



$M := t_A \cap a_1$

Az F_1 merőleges vetülete a_1-en

a főkör egy pontja ⇒

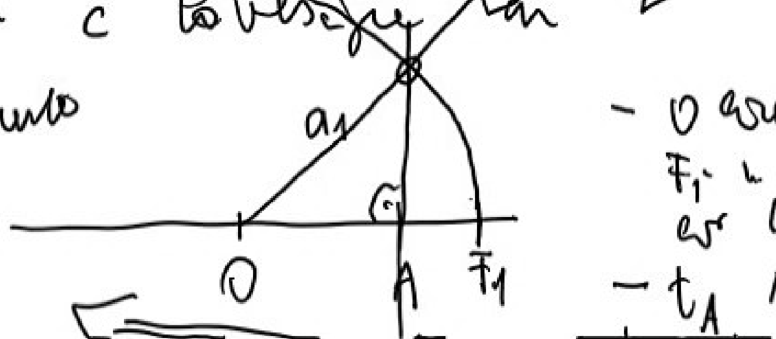
$|\overline{OT_1}| = a = |\overline{OA}|$

$OF_1T_{1\Delta} \sim OMA_\Delta$ (mert a szögeik páronként megegyeznek), de $|\overline{OT_1}| = |\overline{OA}| \Rightarrow OF_1T_{1\Delta} \cong OMA_\Delta$

$\Rightarrow |\overline{OF_1}| = |\overline{OM}| = c$ (fél körtulajdonság)

⇒ M pont O-tól c távolságra van

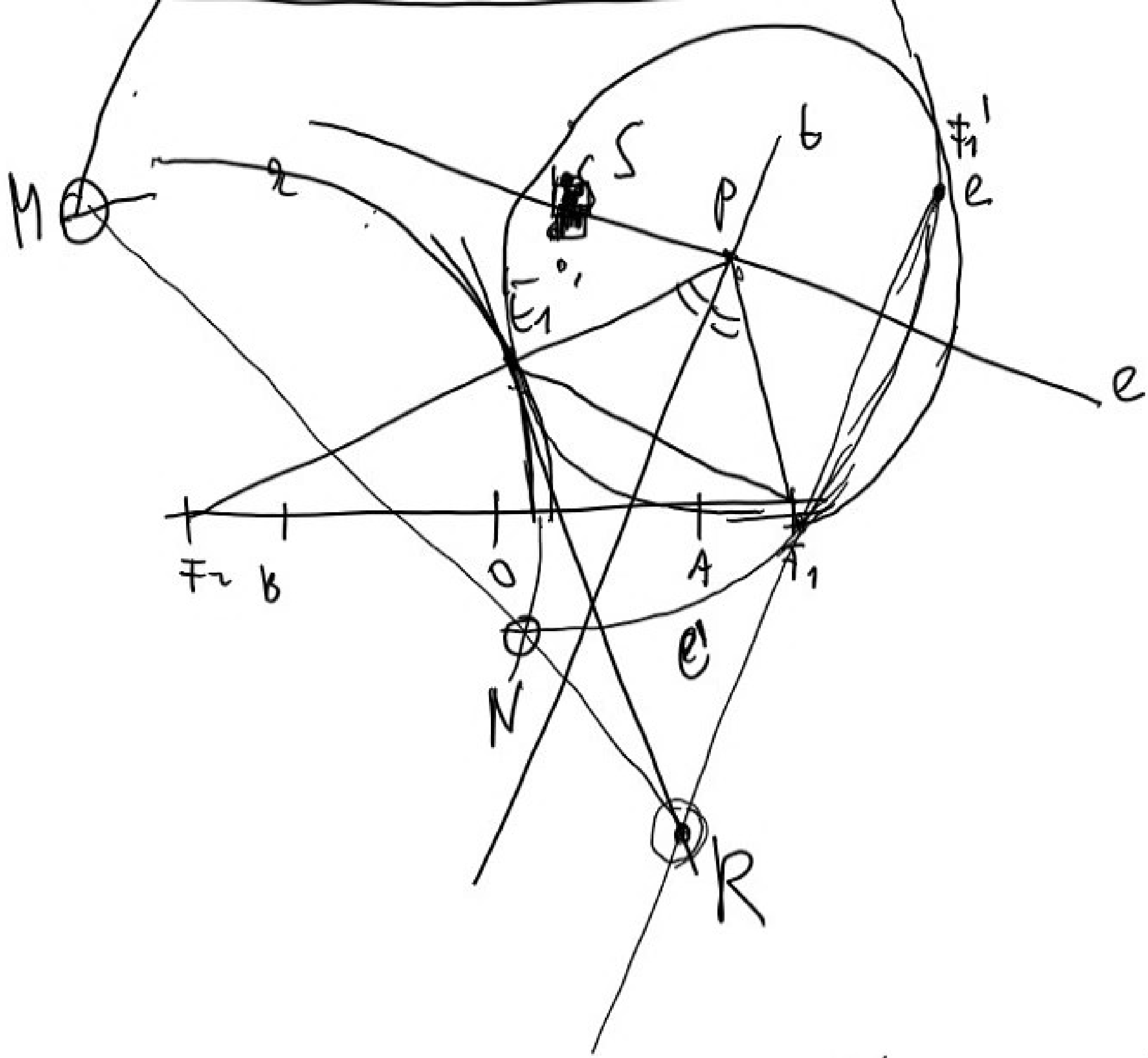
Köv: Aszimptota szerkesztés



- O középpontú F_1-en áthaladó kör (k)
- t_A A-beli

$k \cap t_A \in a_1$

Hiperbola egyenes metszéspontjainak a szerkesztése

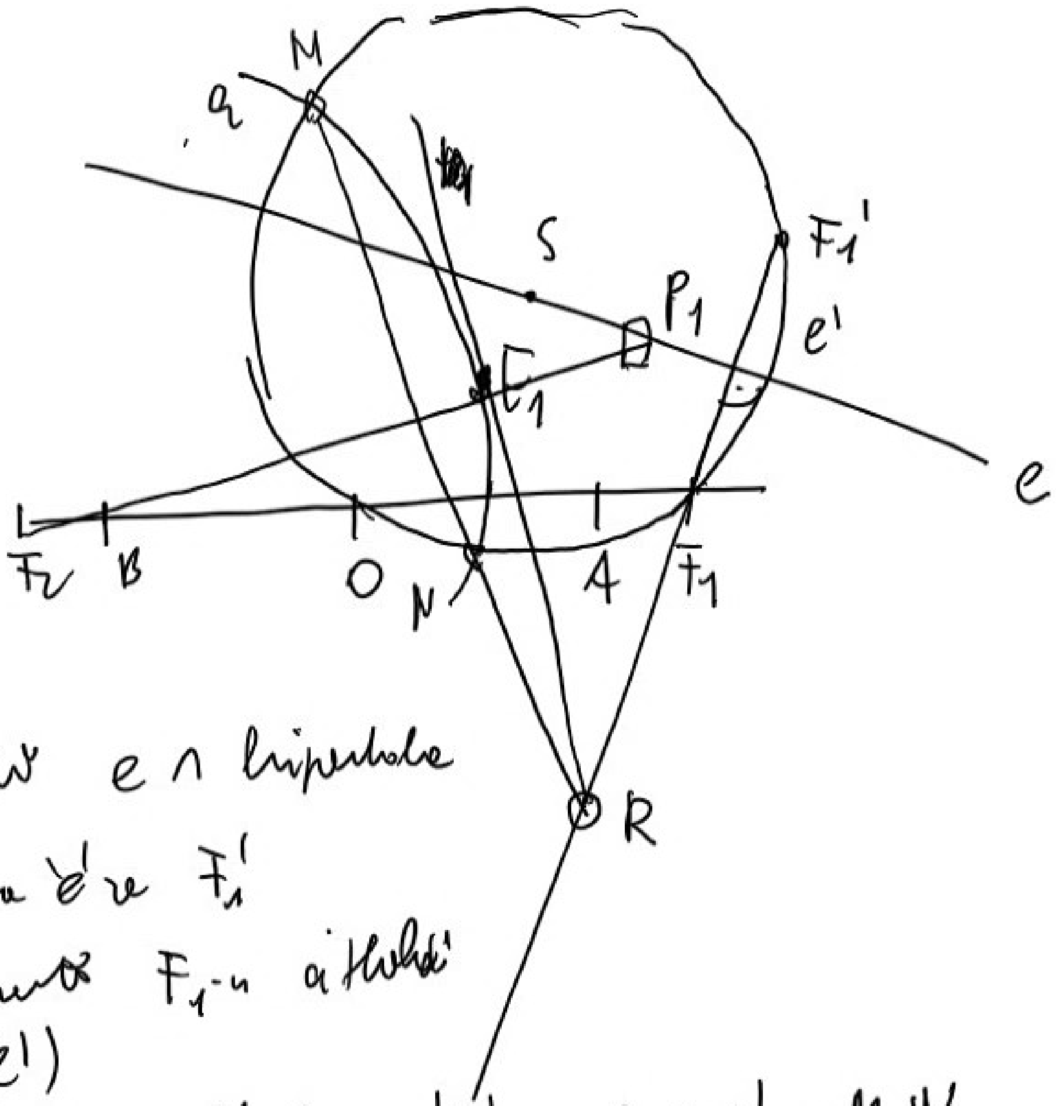


Szerkesztés: 1) F_1-et tükrözzük 'e'-re $\Rightarrow F_1'$

2) Rajzoljunk egy segédkört úgy, hogy F_1, F_1'-n [illegible], hogy messe a 'h' vezérkört ('S' a középpont), $\{M, N\} = h \cap e'$

3) $MN \cap F_1F_1' = R$, ami a h, e' hatványvonalán is rajta de a h, e hatványvonalán is $\Rightarrow$ R-ből húzott érintő h-hoz $\rightsquigarrow E_1$

[illegible] ki $F_2E_1 \cap e = P$ pont.



keressük $e \cap$ hiperbola

- F_1 tükörképe e-re F_1'
- S középpontú F_1-en átmenő kör (e')
- F_2 középpontú ellenkör 'r' $\quad r \cap e' = M, N$
- $MN \cap F_1F_1' = R$
- R-ből érintő (2 db. van a megfelelő rajzon)
  érintési pont E_1 (E_2)
- $F_2E_1 \cap e = P_1$ metszéspont (P_2)

Másodrendű felületek

Def: $A: V \to V$ lineáris leképezés, $b \in V$, $c \in \mathbb{R}$

$\{ \underline{x} \in V \mid \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + c = 0 \}$

$\shortparallel$

A V vektortér másodrendű felülete

Mj: V ~~és~~ n-dimenziós $\Rightarrow \mathbb{R}^n$ lesz az alaptér
$\mathbb{R}$

és $n=2$ a valós sík az alaptér. Az $\mathbb{R}^2$ másodrendű felületei a másodrendű görbék.

Áttérés homogén koordinátákra. Legyen az inhomogén koordináták $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ($n=2$-re frissítjük)

$$x_1' = \frac{x_1}{x_{n+1}} \quad \dots \quad x_n' = \frac{x_n}{x_{n+1}} \neq 0 \quad \text{és} \quad x_{n+1}' = 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \right]$$

$\underline{x}^T A \underline{x}$ kvadratikus alak

$$\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) A \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} \end{pmatrix} + 2(b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} \end{pmatrix} + c = 0 \quad / \cdot x_{n+1}^2$$

$$\Sigma x \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$\underset{\sim}{x}'^T A \underset{\sim}{x}' = \sum a_{ij} \frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2} + 2 \sum b_i \frac{x_i}{x_{n+1}} + c = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2\sum b_i x_i x_{n+1} + c x_{n+1}^2 = 0$$

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

homogén koordinátákkal elég

$$\underline{x}^T \tilde{A} \underline{x} = 0 \qquad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^T & c \end{pmatrix}$$

Báziscserével ezt a lehető legegyszerűbb alakra szeretnénk hozni, azaz olyan alakra, amiben a lehető legtöbb nulla szerepel a mátrix elemei között.

Az ismert esetben, a bázisváltó mátrix egy ortogonális $n \times n$-es mátrix B, a bázisváltás elvégezhető: $\boxed{x_{régi} = B\, x_{új}}$

Lineáris algebra a *ortonormált bázis* feltételezi egy rögzített O kezdőpontú o.n. bázist

De a felületek leírásánál az a fontos, hogy hol van az 'O'-pont. Az általános bázisváltás

$$\{O, e_1 - e_n\} \xrightarrow{\text{leírja}} \{O', \underline{e}_1' - \underline{e}_n'\}$$

koordinátarendszer → koordinátarendszerbe

<u>Homogén koordinátákban</u> ezt könnyen leírhatjuk, ehhez egy lineáris algebrai bázisváltás után kell egy $\underline{t}$ eltolást alkalmazni ($\underline{x}' = B\underline{x} + \underline{t}$) helyvektor

$$\bar{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & \underline{t} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array}\right)$$

B ortogonális $n \times n$-es mátrix, $\underline{t}$ ~~(n×n)~~ $(n \times 1)$-es vektor, $\bar{B}$ az általános bázisváltás mátrix homogén koordinátákkal.

Feladat kell keresni egy $\tilde{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & \underline{t} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array}\right)$ B orto-gonális $n \times n$-es általános báziscsere transzformációt úgy, hogy

$\left(\tilde{B}^T \tilde{A} \tilde{B}\right)$ $(n+1)\times(n+1)$-es mátrix

a lehető legtöbb nullát tartalmazza, ahol

$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{b}^T & c \end{array}\right)$ $\left(\longleftrightarrow \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + c = 0 \right.$ másodrendű felület$\left.\right)$

$\rightsquigarrow$ i) lineáris algebrából (főtengely tétel 'B' miatt)

ii) t-t meghatározni úgy, hogy $\tilde{B}^T \tilde{A} \tilde{B}$ a lehető legegyszerűbb legyen

iii) A redukált alak diszkussziójával megkaphatjuk az adott dimenziós másodrendű felületek kanonikus alakjait (stb.)