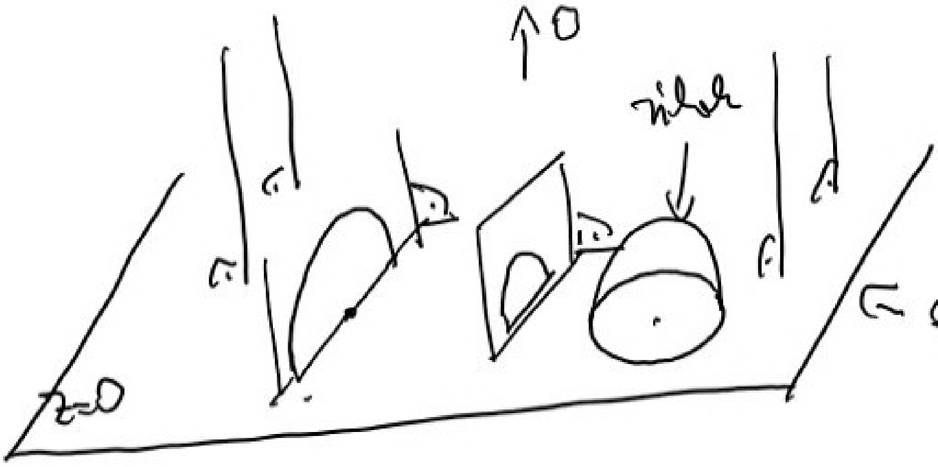
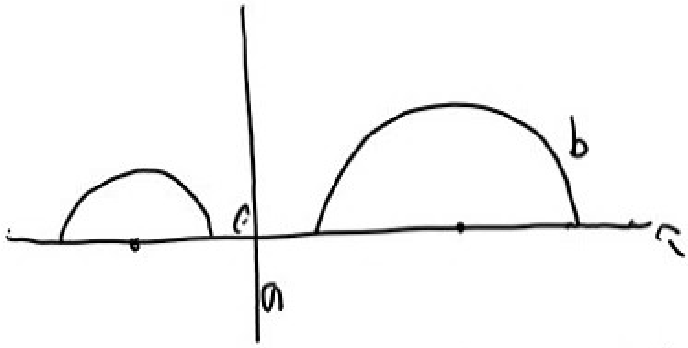
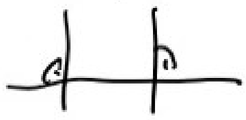
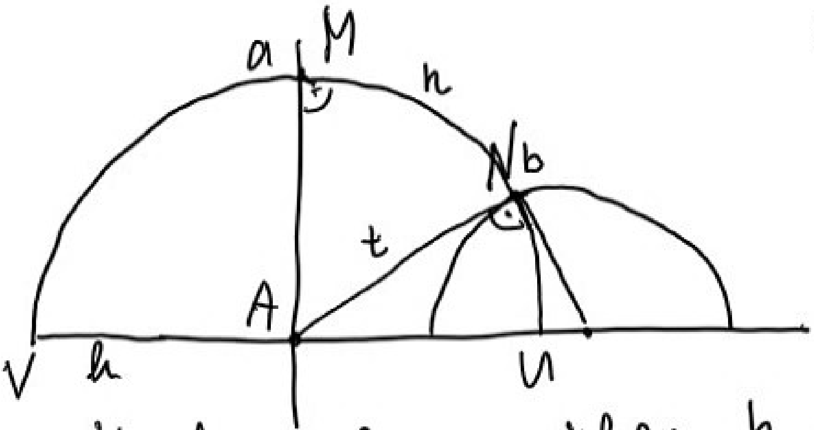


Végtelen távoli pontok = { z=0 sík pontjai , z = végtelen távoli pontja az Euklideszi }

Ultraparallel egyenesek modellben: közös merőleges félkör

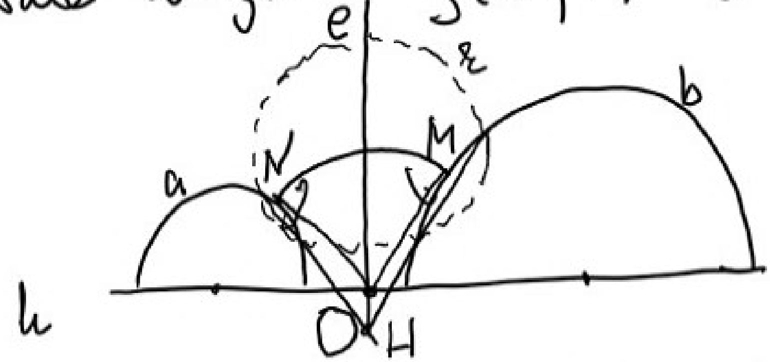


Ha 'a' egyenes a és b ultraparallel ⇒ b invertálással egyenesíthető, mert  az ilyen egyenespár párhuzamos. Keresendő n egyenes $n \perp a$ $n \cap a \neq \emptyset$ $n \cap b \neq \emptyset$ $n \perp b$ ⇒ n invertált egyenessé válik (mert 'a'-val nem párhuzamos) és a középpontja ezért illeszkedik 'a'-ra és 'h'-ra is mert egyenest szegmenstől a modellben ⇒ a középpont a 'A'-pont. keresendő kör, mely középpontja A és ⊥ a 'b' ívre



t legyen A-ból érintő a b-hoz. Az N-ponton áthaladó kör merőleges b körre és merőleges A-ra is. A két egyenes távolságát az MN szakasz hossza adja. $\rho(a,b) = \rho(MN) = \ln(NMVU)$.

Mj:



Kell, egy a, b körökhöz az O pontból egyenlő hosszú érintő legyen húzva. ⇒ O-pont a két kör hatványvonalán van. Kell a hatványvonal metszete h-val. Ez merőleges a 'h'-ra, mert elegendő egy pontot keresni. 'e' egy tetszőleges kör, ami a-t is b-t is metszi, H a két húr metszéspontja. A hatványvonal e ($e \perp h$, $H \in e$)

⇒ ~~most~~ O-ból érintős érintési pontok M, N

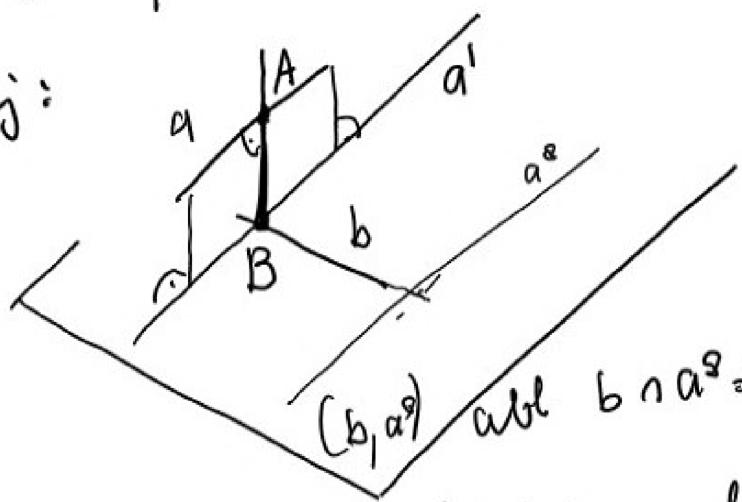
n = {MN-n áthaladó kör O középponttal}

-3-

A féltérmodellben adott 'a' egyenes (egyenesként reprezentálódik) 'b' egyenes. Az a, b ~~vetítősparallelek~~ $\boxed{\text{kitérők}}$ (nincs közös pontjuk) => b körívként reprezentálódik. (Mivel 2 párhuzamos egyenesnek van közös pontja.) Keressük (ha van) azt az egyenest (n), amire $a \cap n \neq \emptyset$; $b \cap n \neq \emptyset$

és $a, b \perp n$.

Mj:

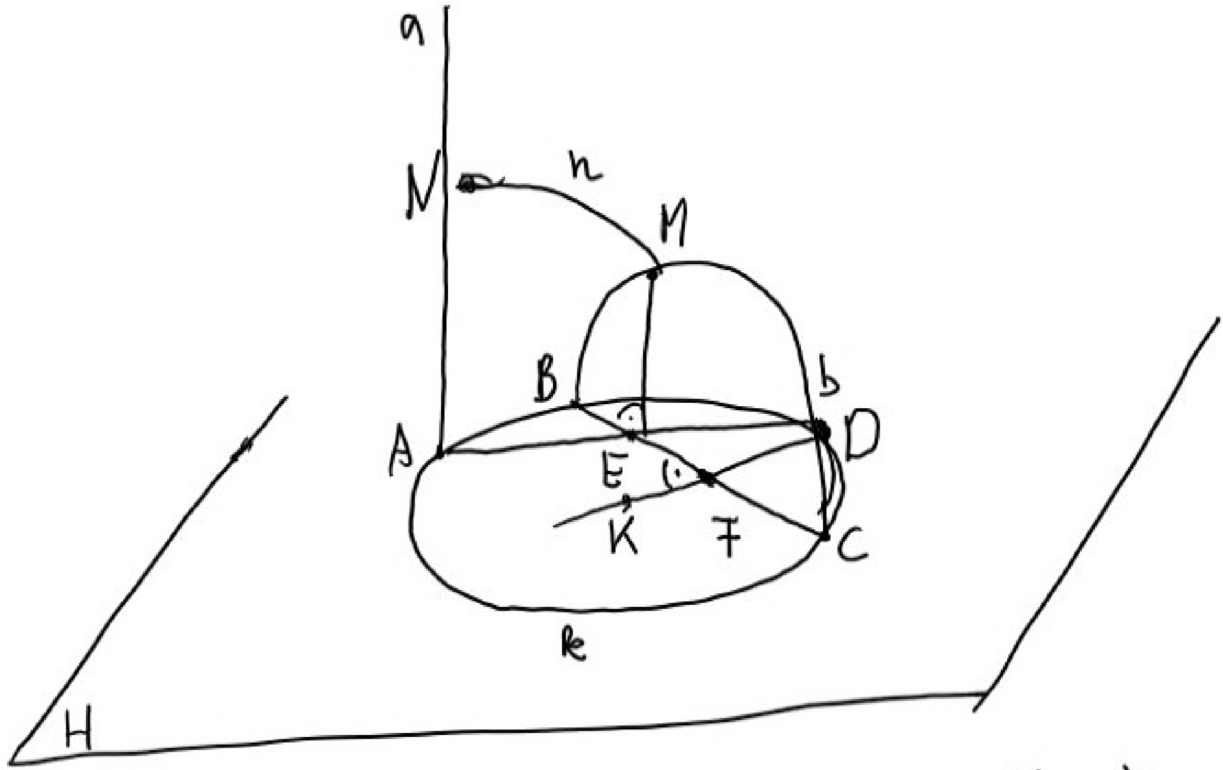


(Euklideszi)

(b, a^*) ahol $b \cap a^* \neq \emptyset$ és $a \parallel a^*$

<u>Ez nem működik a hiperbolikus térben</u>

Ahol működik is biztosítható, ilyen egyenes létezése (lsd. később)



A: Az a egyenes ∞ távoli pontja a H síkon

B, C: A b –||– pontjai –||–

{A, B, C} nem kollineárisak, mert ha azok lennének a két egyenes u.abban az a-n áthaladó síkban reprezentálódik hiperbolikus síkba esne

⇒ A, B, C egyértelműen meghatároz egy körvonalat

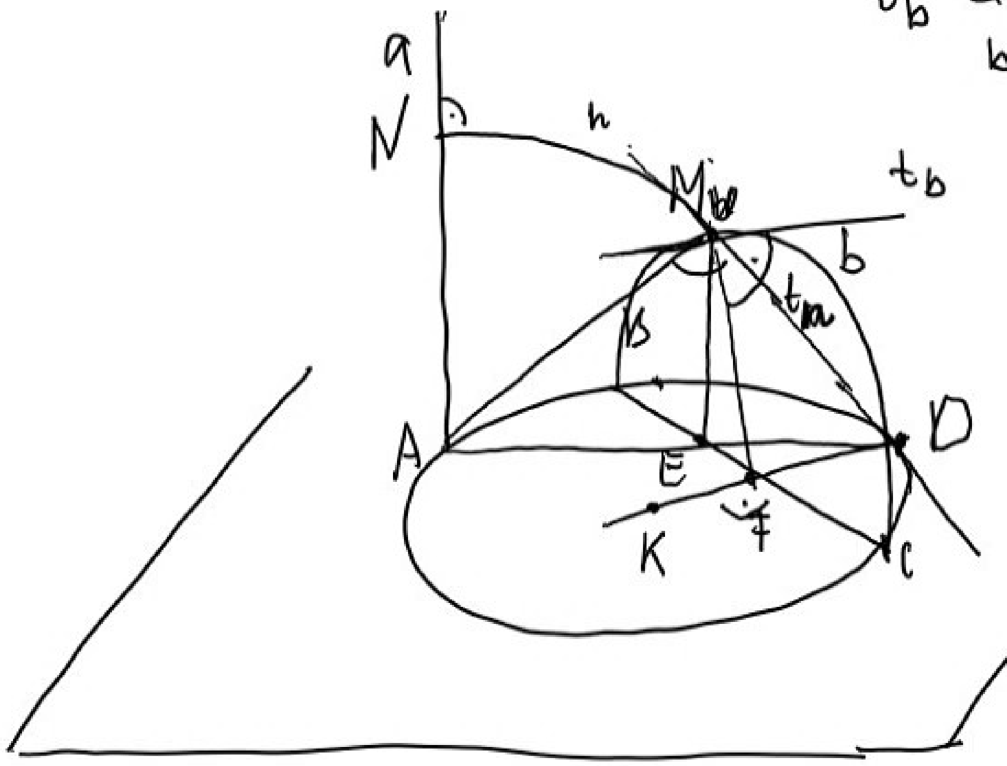
K: Az (ABC) kör középpontja F: $\overline{BC}$ felezőpontja

A KF egyenes legyen a $\overline{BC}$ merőlegesfelezője

D: (KF) ∩ k - közül vagy, hogy a BC húr által meghatározott körívek közül a A-t nem tartalmazóé legyen (A ≠ B, C ellenkező esetben a és b párhuzamos)

E := AD ∩ BC (∃!) M a $\overline{BC}$ E feletti pontja, A kezdetű kör az A középpontú M-n áthaladó (a, M)-síkbeli ív kör

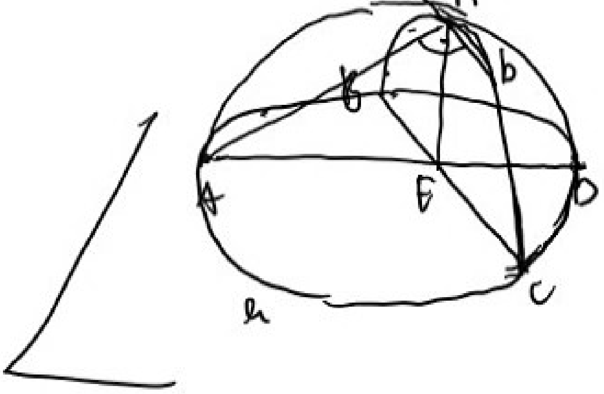
$t_b \subset (BCM)$ sík és erre b körít $\Rightarrow t_b \perp MF$



$t_b \subset (BCM) \Rightarrow t_b \perp (KD)$

Áll: $n \perp a, b$ $\quad (n \cap b = M,\ n \cap a = N)$

Bz: A középpontja A ⇒ mivel merőleges 'a'-t érinti ⊥-ző. Kell, n körív és a b körív merőlegesek, azaz M-beli érintőik ⊥ egymásra. Legyen t_n az n körív érintője M-ben. $t_n \subset (ADM)$ síknak és merőleges AM. Az M pont az AD-re mint átmérőre rajzolt félkör pontja (



a-kör fölé rajzolt félgömb tartalmazza b-egyenest és M pontot is ⇒ (AMD) sík elvágja a félgömbből egy (AD) átmérőjű félkört mely kör) ⇒ Thales tétel miatt t_n érintő átmegy D-n. Legyen t_b a b körív érintője M-ben)

$(\quad)$

$$\Rightarrow t_b \unrhd (MFD)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{t_b \unrhd MD = \\ = t_n}$$

Q.E.D.

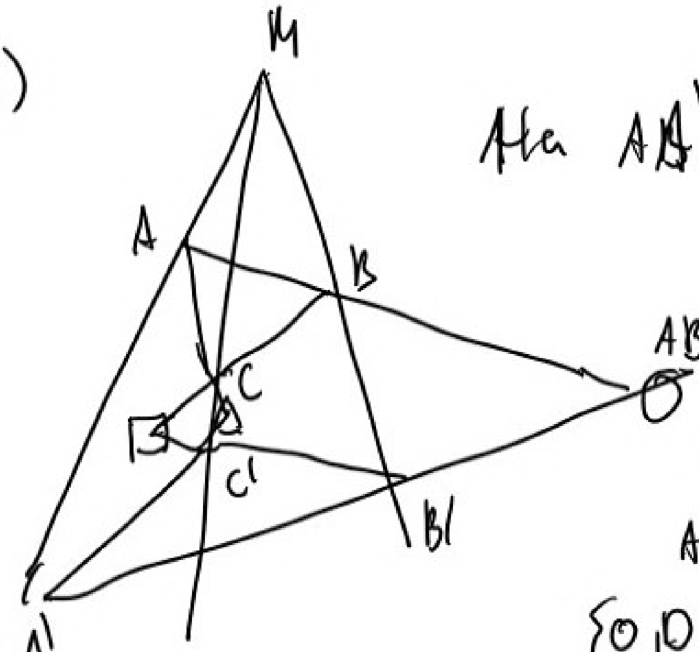
Valós projektív sík legfontosabb tételei

1, Desargues tétel (ekvivalens az illeszkedési axiómákkal azzal, hogy ferde test felett koordinátázható)

2, Pappus-Pascal tétel (ekvivalens Desargues-i síkok azzal, hogy a koordinátatest kommutatív)

3, Pascal-Brianchon tétel (alapvető, a kúpszeletek szerkesztési feladatainál)

T (Desargues)



Ha $AA' \cap BB' \cap CC' = M$

$\Downarrow$

$AB \cap A'B' = O$

$BC \cap B'C' = \square$

$AC \cap A'C' = \Delta$

$\{O, \square, \Delta\}$ kollineárisak

Bz: homogén koord. $M = [\underline{m}]$ $A = [\underline{a}]$ $B = [\underline{b}]$ $C = [\underline{c}]$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ úgy választva, hogy $[\underline{a} + \underline{m}] = A'$ $[\underline{b} + \underline{m}] = B'$ $[\underline{c} + \underline{m}] = C'$

$\Rightarrow O = [\underline{b} - \underline{a}]$ $\square = [\underline{c} - \underline{b}]$ $\Delta = [\underline{a} - \underline{c}] \Rightarrow$

$\{O, \square, \Delta\}$ kollineárisak mert $(\underline{b} - \underline{a}) + (\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{a} - \underline{c}) = 0$