Homogén koordináták

Koordinátázás az Euklideszi vektortérben egy olyan bijekció létrehozását jelenti, mely a vektorokhoz szám n-eseket rendel, oly módon, hogy a vektor műveletek valós számokkal való műveletekkel adhatók meg.

$$\underline{v} \in E^n \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{u} \in E^n \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u} \pm \underline{v} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix};$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \underline{u} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix};$$

továbbá, ha a koordinátázást $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ ortonormált bázis segítségével definiáljuk, akkor

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n; \quad |\underline{u}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

, ha $n=3$

$$\underline{u} \times \underline{v} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{w} \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

ezért

$$\langle \underline{u} \times \underline{v} \mid \underline{w} \rangle = z_1 (x_2 y_3 - y_2 x_3) + z_2 (x_3 y_1 - y_3 x_1) + z_3 (x_1 y_2 - y_1 x_2) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

(H.f. Igazoljuk a fenti számítási szabályokat!!)

A kapott számítási szabályok teszik lehetővé az analitikus geometriai számításokat, illetve a geometriai transzformációk analitikus leírását. Igazolható, hogy az E^n tér tetszőleges olyan kölcsönösen egyértelmű egyenest-egyenesbe vivő leképezése (kollineációja), mely egy adott pontot (az origót) saját magába viszi megadható egy $A: E^n \to E^n$ lineáris transzformációval, oly módon, hogy az $\underline{u}$ vektor képét az $A(\underline{u})$ vektor reprezentálja, koordinátákkal kifejezve

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ahol 'A' mátrixa $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ és a művelet a mátrix szorzás.

A kölcsönös egyértelműség a $\det A \neq 0$ feltétel teljesülését jelenti. (Nyilván $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, azaz az origó fixpontja a leképezésnek) Így azonban még az egybevágóságokat sem lehet mind megadni, az eltolások analitikus alakja $\underline{x} \mapsto \underline{x} + \underline{t}$, ezek a fenti alakban nem állnak elő.

T: Tetszőleges kollineáció leírható $\underline{x} \mapsto A\underline{x} + \underline{b}$ alakban, ahol $\det A \neq 0$. A kollineáció egybevágóság, ha A ortogonális mátrix, azaz $A^T A = E$, ahol E az egységmátrix, hasonlóság, ha $A^T A = \lambda^2 E$ alakú, valamilyen $\lambda \neq 0$ valós számmal.

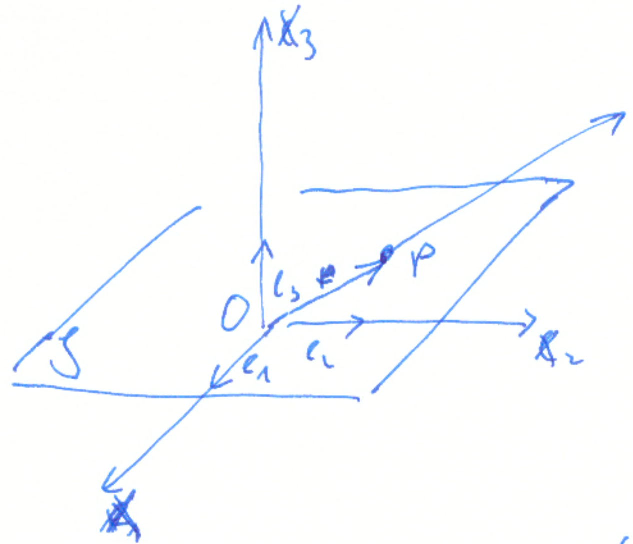
1. Mj: A fenti leírás nem alkalmas általánosabb kollineációk (pld. affinitások) felírására, mert a „végtelen távoli pontok" leírása nem megoldott.

2. Mj: A kétlépcsős kompozíciója nehezen számolható, mert „keveredik" a mátrixszorzás a vektor összeadással, hiszen az eltolásokat nem adhatjuk meg mátrix szorzással $\varphi(\underline{u}) = A(\underline{u}) + \underline{b}$ $\psi(\underline{v}) = C(\underline{v}) + \underline{d}$ akkor $\psi \circ \varphi(\underline{u}) = C(A(\underline{u}) + \underline{b}) + \underline{d} = CA(\underline{u}) + C(\underline{b}) + \underline{d}$ ... stb.

Olyan új koordinátázást szeretnénk létrehozni, mely a fenti két hiányosságot kiküszöböli. Nyilván más „szép" tulajdonságok, ekkor azonban elveszhetnek.

Az O-pont modell

Legyen most $n=2$, azaz a sík pontjait koordinátázzuk, de oly módon, hogy használjuk a tér geometriáját. A rögzített az $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ o.n. bázissal adott analitikus modell $\boxed{X_3 = 1}$ síkjának tekintve, így tetszőleges P ponthoz az $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ koordinátahármast rendeljük hozzá. A továbbiakban ez a koordinátahármas több dolgot is jelent, jelenti az $\overrightarrow{OP}$ helyvektort de jelenti a teljes (OP) egyenest is, meg az S síkból kimetszi a P pontot. Ha koordináta $\boxed{\text{hármasokban}}$ gondolkodunk, az (OP) egyenest tetszőleges irányvektorral megadhattuk volna így



tetszőleges $\lambda \neq 0$-val a $\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\lambda\end{pmatrix}$ vektorhármas is azt az S-síkbeli P pontot adja meg. A sík pontjainak u.n. "homogén koordinátái" tehát koordináta hármasok ekvivalencia osztályai, ahol $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \neq 0$ $x_1=\lambda y_1$ $x_2=\lambda y_2$ $x_3=\lambda y_3$. A homogén koordináta hármasokat megkülönböztetésül szögletes zárójelbe téve fogjuk jelölni,

$$\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right] := \left\{\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R}\ \lambda\neq 0\right\},$$

vagy vektoros alakban az $\underline{u}$ osztályát, ha a mintegy $[\hat{\underline{u}}]$-val jelöljük. Maga a vektor a hármas osztály egy reprezentánsa.

Műveletek homogén koordinátákkal

1) A sík egy közönséges P pontjának az utolsó koordinátája nem lehet nulla. Azonban vannak olyan ekvivalencia osztályok is, melyekben $\forall$ hármas utolsó koordinátája nulla. Az ezekhez tartozó egyenesek O-n keresztül haladó az (x_1, x_2) síkban elhelyezke-

dő "irányokat" illetve az S cik ezen irányban be-
költhetők ~~ab~~ távoli vagy ideális pontjait adják meg.

Ezek az ideális pontokat is, számításokban homogé-
nebbé teszik, külön diszkrimináció nélkül egyszerre (például) két egyenes
metszéspontja közönséges vagy végtelen távoli pont.

2) Ha $P, Q \in S$ a sík két tetszőleges (közönséges) ~~vagy~~
~~ideális~~ pontja a p illetve q reprezentánsokkal,
akkor az $\alpha p + \beta q$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ reprezentáns a

$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ koordinátáival egyértelműen az

$\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta q_1 \\ \alpha p_2 + \beta q_2 \\ \alpha p_3 + \beta q_3 \end{pmatrix}$ alakban írható fel. Ha $\alpha p_3 + \beta q_3 \neq 0$, akkor az utóbbi a

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha p_3}{\alpha p_3 + \beta q_3} \left(\frac{p_1}{p_3}\right) + \frac{\beta q_3}{\alpha p_3 + \beta q_3} \left(\frac{q_1}{q_3}\right) \\ \frac{\alpha p_3}{\alpha p_3 + \beta q_3} \left(\frac{p_2}{p_3}\right) + \frac{\beta q_3}{\alpha p_3 + \beta q_3} \left(\frac{q_2}{q_3}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

reprezentánssal is megadható, azaz =

$$a = \frac{\alpha p_3}{\alpha p_3 + \beta q_3} \begin{pmatrix} \frac{p_1}{p_3} \\ \frac{p_2}{p_3} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta q_3}{\alpha p_3 + \beta q_3} \begin{pmatrix} \frac{q_1}{q_3} \\ \frac{q_2}{q_3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

affin koordinátáival az $\vec{OP}$ illetve $\vec{OQ}$ helyvektorával. Így a (PQ) egyenes egy közön-
séges pontját kapjuk. (H.f. Az ideális pontokkal végig
nézni: a többi általános esetet rendezni :)

Azaz a P, Q homogén koordinátáinak lehető egyes lineáris kombinációja homogén koordinátája a (PQ) egyenes egy pontjának, és fordítva az egyenes minden pontja így módon előáll

B) Geometriailag az {O, P, Q} pontok által ~~kimetszett~~ ~~g~~ meghatározott sík metszi ki S-ből a (PQ) egyenest

3) Az S sík pl. minden $\{e_1, e_2\}$ koordinátasík egy ~~geometriai~~ kollineációját az inhomogén koordinátákra vonatkozó $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}$ transzformációja írja le. Az S-sík ezzel megegyező transzformációja az ~~$\begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{A}\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{b} \\ 1 \end{pmatrix}$~~ ~~hármas~~ ~~egyenletnek~~ ~~tesz~~ tegyen ~~eleget, ahol $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mátrix~~

$\begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\underline{x} + \underline{b} \\ 1 \end{pmatrix}$ egyenletnek tesz eleget. Vegyük észre, ha az $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mátrix $\left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array}\right)$ alakú, akkor

$\left[\begin{pmatrix} \underline{x}' \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \tilde{A}\left[\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ teljesül. Sőt tetszőleges $\mu \neq 0$ számmal a $\mu\tilde{A}$ ~~transzformáció~~ mátrix S-n ugyanazt a geometriai leképezést adja mint $\tilde{A}$. Ezért a kollineáció általános alakja homogén koordinátákban

$[x'] = [A][x]$, ahol $[A] := \{\mu A \mid \mu \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{3\times3},\ \det A_{33} \neq 0\}$

$\det A_{33}$ az a_{33} elemhez tartozó ~~sarok aldetermináns~~ aldetermináns. Vegyük észre, hogy $[A]$ affinitást ad $\Leftrightarrow$ ha $\left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array}\right)$ alakú

itt nullák vannak