Az Euklideszi sík egybevágóságai

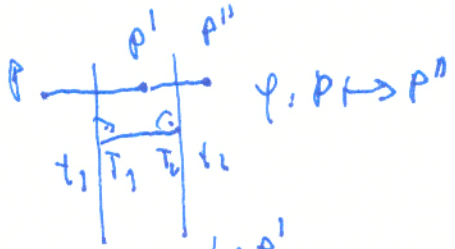
"Legfeljebb 3 egyenesre tükrözés szorzata minden egybevágóság"

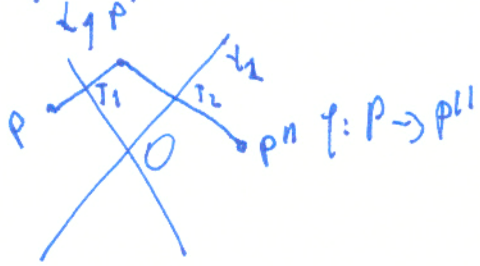
$\Downarrow$

1) identitás 2) egyenesre tükrözés 3) két egyenesre tükrözés szorzata

4) 3 egyenesre tükrözés szorzata

3) Két eset

i) párhuzamos egyenesek  (eltolás) 

ii) metsző egyenesek  (forgatás) 

Lemma (a reprezentálásról)

i) φ eltolás $\Rightarrow$ $\forall P$ $P\varphi(P)$ irányított mérete konstans (előjeles hossza)

$P\varphi(P) = 2d$, ahol $d = \delta(t_1, t_2)$

$|\delta(t_1,t_2)| :=$ a t_1, t_2 egyenesek távolsága

$\text{sign}(\delta(t_1,t_2)) = \begin{cases} + & \text{a } t_1\text{-re } \perp \text{ 'e' egyenes adott irányításával megegyezik } T_1T_2 \\ - & \text{egyébként} \end{cases}$

ii) $O = t_1 \cap t_2 \Rightarrow \forall P$ $|\overline{OP}| = |\overline{O\varphi(P)}|$ és $PO\varphi(P)$ irányított szög konstans $\Rightarrow 2\, T_1OT_2$ irányított szög

1. köv.: φ egyértelműen meghatározott az i) esetben egy t_1 egyenessel és a $2d$ távolsággal

ii) ezekben az O, t_1 pont és az $2\cdot T_1OT_2$ irányított szöggel.

2. Köv.: $\varphi = t_2 \circ t_1$ $\Rightarrow$ i) ezekben létezik $t \parallel t_1$-el $\exists!\ t^* \parallel t_1$

$t^* \circ t = t_2 \circ t_1 = \varphi$

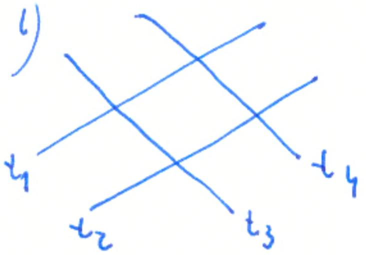
ii) ezekben létezik $O \in t$ ezekre $\exists!\ t^*$

$t^* \circ t = t_2 \circ t_1 = \varphi$

Lemma: i) eltolások szorzata eltolás

ii) azonos középpontú forgatások szorzata forgatás

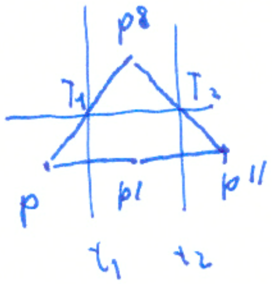
Biz: (H.f. i)



Mi lesz $(t_4 \circ t_3) \circ (t_2 \circ t_1) = ?$

~~Második~~

Segítség:



$t_2 \circ t_1 = T_2 \circ T_1$, ahol T_i a t_i pontra tükrözés!!

ii) $t_4 \circ t_3 \xrightarrow{2.\,\text{Köv}} = t^* \circ t$, ahol $t := t_2$

ezért $(t_4 \circ t_3) \circ (t_2 \circ t_1) = (t^* \circ t_2) \circ (t_2 \circ t_1) = t^* \circ t_1$

4) Diszkusszió

i) $t_1 \cap t_2 \cap t_3 = O$ $\Rightarrow$ $\varphi = (t_3 \circ t_2) \circ t_1 = t^*$ mert $t_2 = t_1$

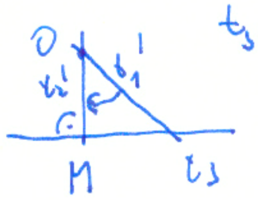
választással $\exists\ t^*$ $(t_3 \circ t_2) = (t^* \circ t_1)$ és így $\varphi = t^* \circ (t_1 \circ t_1) =$

$= t^*$

ii) $t_1 \| t_2 \| t_3 \Rightarrow \varphi = t^*$ (u. úgy mint i)

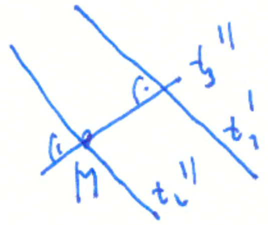
iii) $t_1 \cap t_2 = O$

$t_2 \circ t_1 = t_2' \circ t_1'$ $\leadsto$ $t_2' \perp t_3$

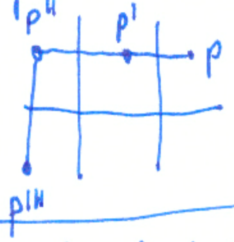


$t_3 \circ t_2' = t_3'' \circ t_2''$ $\leadsto$ $t_3'' \perp t_1'$

$\leadsto$



ez egy speciális alakú leképezés



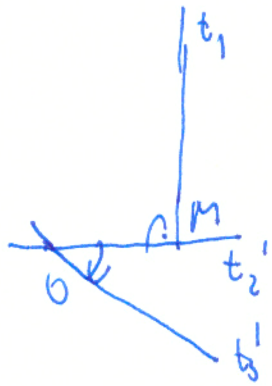
, amit

$\boxed{\text{csúsztatva (eltolva) tükrözésnek nevezünk}}$

iv)

$t_1 \| t_2$
$t_2 \cap t_3 = O$

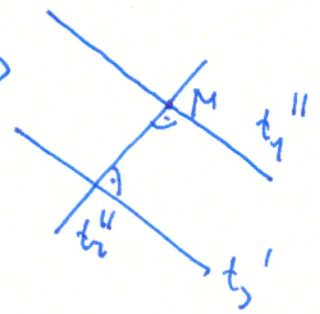
$\longrightarrow$



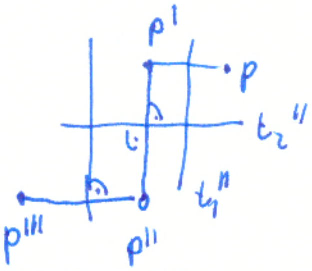
$\leadsto$

$M = t_1 \cap t_2'$

$\longrightarrow$



(azaz



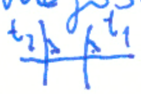
)

$\boxed{\text{DE} \quad t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1 \quad \text{Ha} \quad t_1 \perp t_2}$ $\Rightarrow$

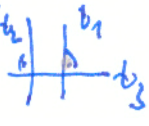
ez is csúsztatva tükrözés

1. Mj: Ezek szerint Euklideszi sík egybevágóságai: identitás, tükrözés egyenesre, $\boxed{\text{eltolás}}$, forgatás, csúsztatva tükrözés

2. Mj: H^2 egybevágóságai u. ezek, csak 2 "eltolás" van



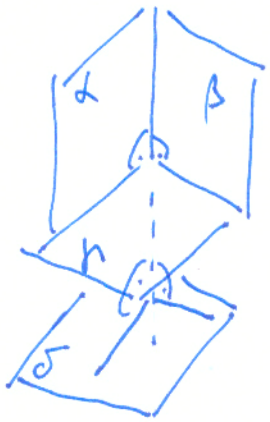
, $t_2 \downarrow \nearrow t_1$ és a csúsztatva tükrözés



2. Lemma a térben (E^3)

Def: Egyenes tükrözés a térben a két merőleges síkra tükrözés szorzata.

Mj: A síkbeli esetnek megfelelően az $\varphi = \beta \circ \alpha$ eltolás, ha $\alpha \parallel \beta$ és egyenes körüli forgatás ha $\alpha \cap \beta = m$ egyenes. Emellett csavarmozgáshoz kapjunk egy forgatás és egy eltolás szorzatát, ha a forgás 'm' tengelye merőleges az eltolás síkjaira, azaz $\varphi = (\delta \circ \gamma) \circ (\beta \circ \alpha)$, ha

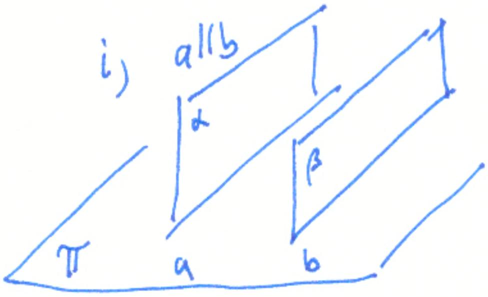


1. Lemma: 2 egyenes tükrözés szorzata a térben
eltolás; ha az egyenesek párhuzamosak
forgatás: ha az egyenesek metszők
csavarmozgás: ha az egyenesek kitérők

2. Lemma: 2 merőleges ~~tengelyű~~ de kitérő tengelyű forgatás szorzata csavarmozgás

Biz.: (1. lemma)

i) $a \parallel b$



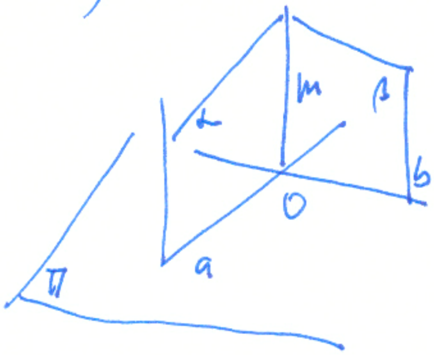
$\Rightarrow (a,b)$ sík $=: \Pi$

$\alpha \perp \Pi \quad a \subset \alpha$

$\beta \perp \Pi \quad b \subset \beta$

$a = \Pi \circ \alpha \qquad b = \beta \circ \Pi \Rightarrow b \circ a = \beta \circ \alpha$
$\beta \parallel \alpha$

ii) $a \cap b = O$ $\quad (a,b)$ síkot határoz meg $=: \Pi$



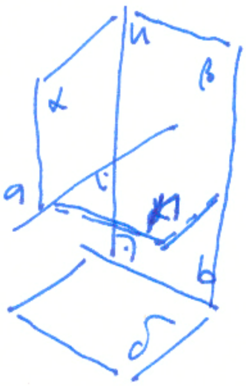
$\alpha \perp \Pi \quad a \subset \alpha$

$\beta \perp \Pi \quad b \subset \beta$

$b \circ a = (\beta \circ \Pi) \circ (\Pi \circ \alpha) = \beta \circ \alpha$

$\beta \cap \alpha = m$

iii)



'n' az a, b normáltranszverzálisa

$\alpha = (a, n)$

$\beta = (b, n)$

$\gamma =$ α-ra merőleges 'a'-n keresztül ($\gamma \perp n$ így $\boxed{\gamma \perp \beta}$)

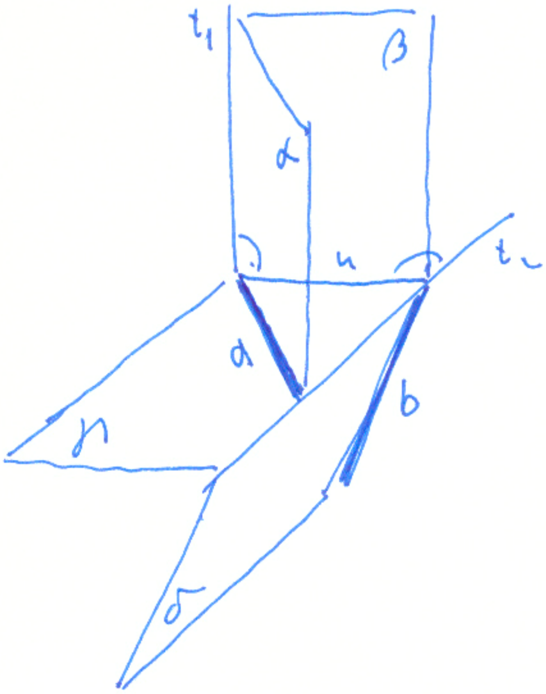
$\delta =$ β-ra $\perp$ b-n keresztül ($\delta \perp n$ miatt)

$a = \gamma \circ \alpha$

$b = \delta \circ \beta$

$b \circ a = (\delta \circ \beta) \circ (\gamma \circ \alpha) =$
$= \delta \circ (\beta \circ \gamma) \circ \alpha = \delta \circ (\gamma \circ \beta) \circ \alpha = (\delta \circ \gamma) \circ (\beta \circ \alpha)$ mert $\gamma \perp \beta$

Biz: (2. lemma)



'n' a 2 tengely normáltranszverzálisa. A t_1 körüli forgatást reprezentálja $\beta \circ \alpha$, ahol $\beta \cap \alpha = t_1$, $\beta = (t_1, n)$ (α adódik). A t_2 tengely körüli forgatás legyen $\delta \circ \gamma$ ahol $\gamma = (t_2, n)$ és δ szintén adódik. Ekkor $\beta \perp \gamma$ így

$\beta \circ \gamma = \gamma \circ \beta$

$\varphi = (\delta \circ \gamma) \circ (\beta \circ \alpha) = (\delta \circ \beta) \circ (\gamma \circ \alpha)$. Itt $\alpha \perp \gamma$ ezért $\gamma \circ \alpha = a$, ahol $a = \alpha \cap \gamma$ és $\beta \perp \delta$ ezért $(\delta \circ \beta) = b$, ahol $b = \beta \cap \delta$. 'a' és 'b' kitérő egyenesek, mert $a \subset \gamma$ és $b \subset \delta$, de a és b t_2-t $= \gamma \cap \delta$-t különböző pontokban metszi (és ugyan 'a' lehet $\parallel$ t_2-vel, de 'b' nem így nem párhuzamosak) $\Rightarrow$ 1. lemma szerint

$\varphi = b \circ a$ csavarmozgás.

H.F.: Igazolni a reprezentálásról szóló lemmát eltolásra és forgatásra