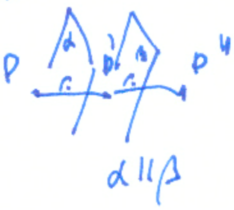
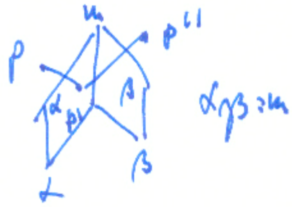
Az Euklideszi tér egybevágóságai

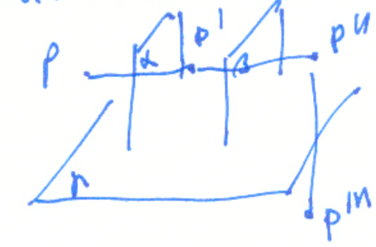
T: Az Euklideszi tér egybevágóságai a következők lehetnek

1, identitás 2, síkra tükrözés 3, eltolás 4, forgatás





5, csúsztatva tükrözés



$P \mapsto P'''$

$\alpha \parallel \beta \quad \gamma \perp \alpha, \beta$

6, ~~eltolás~~ forgatva tükrözés

$\alpha \cap \beta = m$

$m \perp \gamma$

7, csavarmozgás

$\delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$

$\alpha \cap \beta = m \perp \gamma, \delta$

0, ∀ egybevágóság legfeljebb 4 síktükrözés szorzata

Bz: 1) ugyanis, akkor a síkban, ha van 4 nem egysíkú fixpont (A, B, C, D) akkor (ABC), (ABD), stb. síkok ∀ pontja fix. P tetszőleges, ha pl. A, P-t összekötő (BCD) sík, akkor az $\overline{AP}$-n van a síknak pontja így ~~egyenes~~ (AP) egyenesen van 2 fixpont => P fix. Ha ez nem teljesül egyik másikkal sem, akkor $\overrightarrow{AP}$ futtatás mentén BCD△ síkját ✓

2, 3, 4 teljes felsorolást ad, legfeljebb 2 síktükrözés szorzata

$\boxed{\text{Legyen } \alpha, \beta, \gamma \text{ 3 síktükrözés}}$ $\varphi = \gamma \circ \beta \circ \alpha$

2 eset i) δ az α, β, γ-ra egyszerre merőleges sík

P tetszőleges pont

$\varphi(P) = P'$

P merőleges vetülete δ-n P_m

H.f.: Igazoljuk, hogy ~~$\varphi(P)=P'$~~ $\varphi: P \mapsto P_m \mapsto (c \circ b \circ a)(P_m) =$

$= P'_m \mapsto P'$

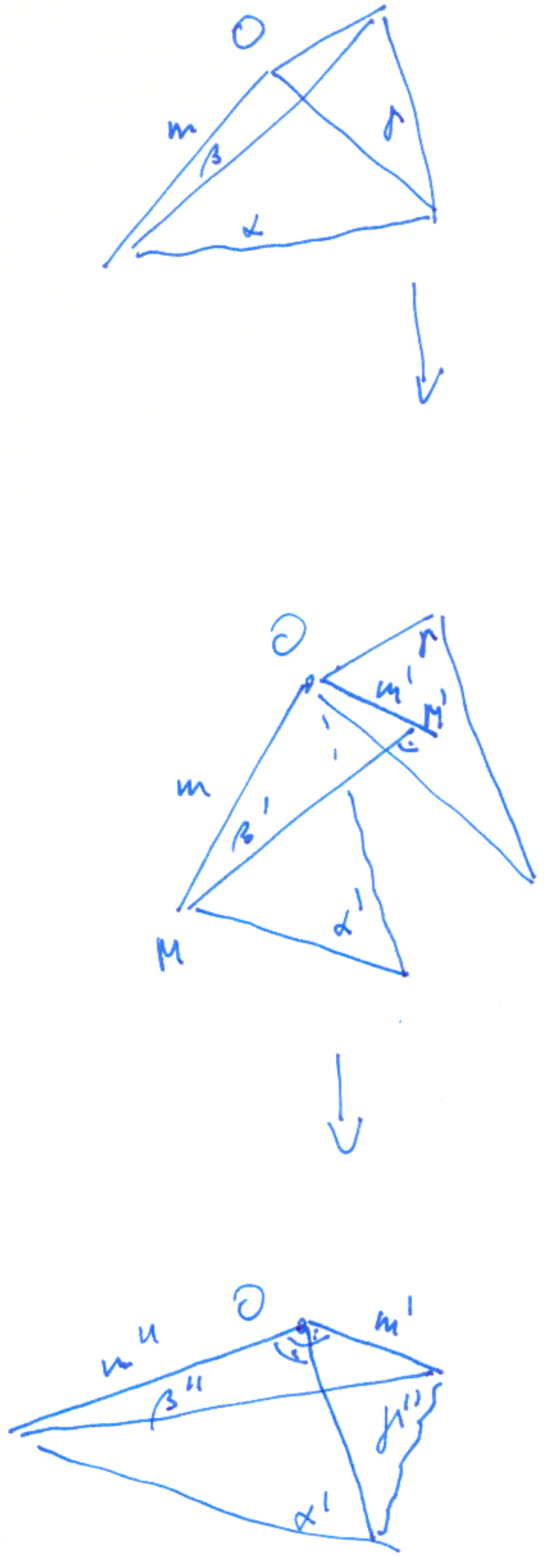
$\varphi = \gamma \circ \beta \circ \alpha$ megkapható úgy, hogy P-t merőlegesen vetítjük δ-ra (P_m) erre alkalmazzuk $(c \circ b \circ a)$-t, ahol $\alpha \cap \delta = a$, $\beta \cap \delta = b$, $\gamma \cap \delta = c$, majd megkeressük, azt a P' pontot, ami δ-ra nézve P-vel egy féltérben van és $(P' P'_m) \perp \delta$ valamint $|PP_m| = |P'P'_m|$

A H.f.-al a leképezés egyszerre 3 síkegyenes visszavezethető megadott leképezéssel azonosítható, ez ~~van~~ vagy elfajult tükrözéssé vagy csúsztatva tükrözés $\Rightarrow$ vagy síktükrözés φ, vagy csúsztatva tükrözés

ii, ha nincs közös merőleges sík, akkor $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{O\}$ (van pontosan 1 közös pontjuk)

u.is $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \alpha, \gamma$-ra merőleges sík van
vagy $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ is van közös merőleges sík

$\alpha \cap \beta = m$ és $\gamma \parallel m$ esetén a γ-ra merőleges sík α, β, γ-ra merőleges



$\alpha \cap \beta = m$

$(\beta \circ \alpha)$-t reprezentáljuk át $(\beta' \circ \alpha')$-vé úgy, hogy $\beta' \perp \gamma$ teljesüljön. Ha $m \perp \gamma$-ra akkor $(\gamma \circ \beta \circ \alpha)$ forgatva tükrözés és ez a lépés sem kell, egyébként m' legyen 'm' merőleges vetülete γ-n és $\beta' = (m, m')$.

Ekkor $\boxed{\beta' \perp \gamma}$ teljesül és

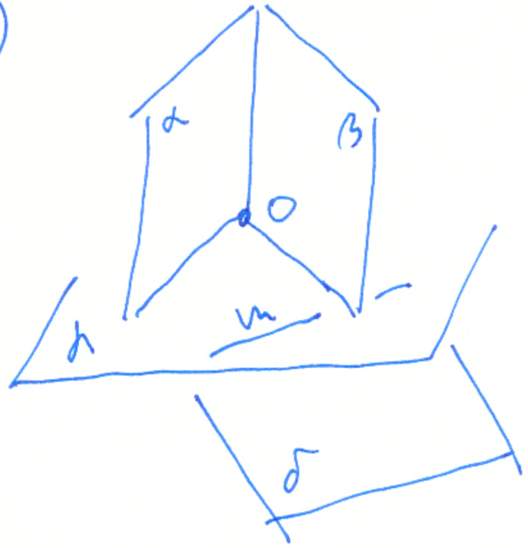
$$\varphi = \gamma \circ (\beta' \circ \alpha') = (\gamma \circ \beta') \circ \alpha'$$

és $\gamma \cap \beta' = m'$. Ekkor $(\gamma \circ \beta')$-t reprezentáljuk át $(\gamma'' \circ \beta'')$-vé úgy, hogy $\gamma'' \perp \alpha'$ teljesüljön. Ekkor $\gamma'' \perp \beta''$ marad és $\gamma'' \perp \alpha'$ miatt $\gamma'' \perp (\alpha' \cap \beta'') = m''$, azaz

$\varphi = \gamma'' \circ \beta'' \circ \alpha'$ forgatva tükrözés

$\boxed{\text{Végül legyen } \varphi = \delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha}$ 4 síktükrözés szorzata

Mint látjuk ekkor $(\gamma \circ \beta \circ \alpha)$ forgatva tükrözés (a, eset) vagy csúsztatva tükrözés (b, eset) a)



Legyen $m := \gamma \cap \delta$

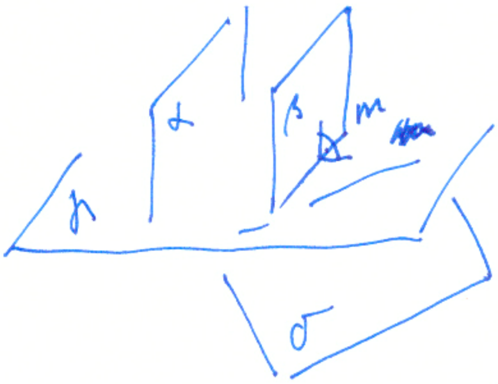
i) 'm' nem létezik ha $\gamma \parallel \delta$ ekkor φ csavarmozgás (Def.)

ii) $\exists! m$ de '$O = \alpha \cap \beta \cap \gamma$' nem illeszkedik m-re

$\Rightarrow \varphi = (\delta \circ \gamma) \circ (\beta \circ \alpha)$ a 2. lemma miatt (merőleges kitérő tengelyű forgatások szorzata $\Rightarrow$ csavarmozgás)

iii) $O \in m$, ekkor 2 forgatás szorzata metsző tengelyekkel $\Rightarrow$ forgatás (H.f.)

b)



$m = \beta \cap \gamma$, ha $m \parallel \delta$ $\Rightarrow \gamma \parallel \delta \Rightarrow \varphi$ 2 eltolás szorzata azaz eltolás (lásd a következő oldal!)

Egyidejűleg m-körül $(\gamma \circ \beta)$ átparaméterezhető $\gamma' \circ \beta'$-vé úgy, hogy $\beta' \perp \delta$ legyen. Ekkor $\gamma' \perp \beta'$ és $\delta \perp \beta'$ miatt $n := \gamma' \cap \delta \perp \beta'$. Mivel α-t nem változtattuk $\beta \rightsquigarrow \beta'$-nél $\alpha \cap \beta'$ is egy egyenes 't'. $t \subset \beta'$ és $n \perp \beta'$ miatt $t \perp n$, ugyanekkor

$\varphi = \delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha = (\delta \circ \gamma') \circ (\beta' \circ \alpha)$ miatt φ egy t-körüli és egy n-körüli forgatás szorzata, ahol $t \perp n$, ez vagy metsző t és n és egy újabb forgatást kapunk, vagy kitérők és 2. lemma szerint egy csavarmozgást.

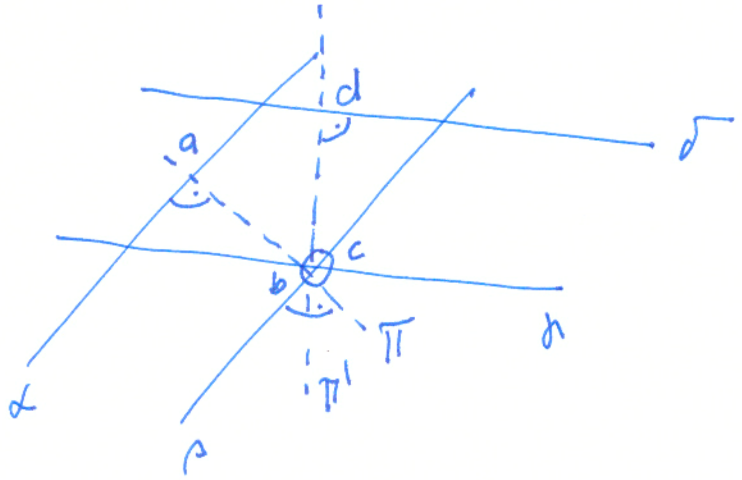
Mj.: két eltolás szorzata eltolás

$\varphi = (\delta\circ\gamma)\circ(\beta\circ\alpha)$ $\quad \alpha\|\beta$ és $\gamma\|\delta$ $\Rightarrow$

vagy $\alpha\|\beta\|\gamma\|\delta$ és triviális ($\beta^* = \gamma'$ a kiegészítéssel)

vagy $(\alpha\cap\gamma), (\alpha\cap\delta), (\beta\cap\gamma), (\beta\cap\delta)$ egyenesek párhuzamosak

T. fel ezek $\perp$-ek a lap síkjára



$\Pi \supset \beta\cap\gamma =: b$ egy β-ra (és így α-ra) merőleges sík $\Pi\cap\alpha = a$. 1. lemma szerint $\beta\circ\alpha = b\circ a$ (ahol a, b a megfelelő egyenesre vonatkozó tükrözések). U.így $\Pi' \perp \gamma, \delta$ $\quad \Pi'\cap\gamma = c\ (=b)$

$\Pi'\cap\delta = d \Rightarrow \delta\circ\gamma = d\circ c$, ahol

$$\varphi = (\delta\circ\gamma)\circ(\beta\circ\alpha) = (d\circ c)\circ(b\circ a) = d\circ a$$

ami 2 párhuzamos egyenes tükrözés (1. lem) $\Rightarrow$ eltolás